

NOCIONES GEOMÉTRICAS DE CAMBIOS LOCALES Y EFECTOS ACUMULADOS EN LA EDUCACIÓN BÁSICA SECUNDARIA PARA GRADOS 8° Y 9°

Oscar Orlando Ortiz Corredor¹
ORCID: 0009-0002-2430-5653
E-mail: oscartizo3c@gmail.com
Colegio Toberín I.E.D. Bogotá D.C.
Colombia

Lady Alexandra Gelvez Ortega²
ORCID: 0009-0000-5735-8108
E-mail: ladygelvez1979@gmail.com
Colegio Santos Apóstoles. San José de
Cúcuta N.S.
Colombia

Recibido: 05/02/2026

Revisado: 09/03/2026

Aprobado: 13/04/2026

RESUMEN

El aprendizaje de las funciones reales comienza usualmente en los grados Octavo y Noveno con estudiantes entre los 14 a 16 años. Generalmente, se estudian algunos de sus atributos, diferentes representaciones, solución de ecuaciones y aplicaciones diversas; sin ninguna prioridad al significado de variación local y de acumulación de estos cambios en un intervalo. Esto puede ser causa de la brecha existente entre el Álgebra y el futuro Cálculo, a pesar de algunos propósitos de los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA) para estos cursos. El propósito de este artículo es analizar la viabilidad y mostrar el valor didáctico de construir progresivamente nociones de estos conceptos como puente conceptual temprano a la variación local y acumulada de las funciones lineales y cuadráticas sin formalismos técnicos, utilizando estimaciones, comparaciones y refinamientos de las aproximaciones; de las inclinaciones de los segmentos tangentes a un conjunto de sus puntos y del área bajo las gráficas en algún intervalo de su dominio; por medio de las construcciones geométricas habituales con lápiz y papel, simuladores o software. La metodología corresponde a un ensayo teórico-didáctico como ejercicio de conciencia didáctica para abordar el pensamiento variacional desde la visualización geométrica. La propuesta central estriba en la viabilidad de la introducción de estas ideas, dada su alineación con los DBA de los grados 8° y 9° en Colombia. Se espera que esta articulación temprana transforme la comprensión de estas funciones de una visión estática a una dinámica que apoye los conceptos previos para introducirse en el estudio del Cálculo.

PALABRAS CLAVE: Variaciones Locales, Efectos Acumulados, Funciones Lineales, Funciones Cuadráticas, Visualizaciones Geométricas.

¹ Docente Matemáticas-Física Colegio Toberín I.E.D Bogotá D.C., Colombia. Campo de Pensamiento STEM. Magíster en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Nacional de Colombia UNAL. Estudiante Doctorado Educación UPEL.

**NOCIONES GEOMÉTRICAS DE CAMBIOS LOCALES Y EFECTOS
ACUMULADOS EN LA EDUCACIÓN BÁSICA SECUNDARIA PARA GRADOS
8° Y 9°**

ENSAYO

² Docente Inglés Colegio Santos Apóstoles San José de Cúcuta N.S., Colombia. Área de Humanidades. Magíster en Comunicación Multilingüe y Gestor del Conocimiento, Universidad de Pamplona. Estudiante Doctorado en Educación UPEL.

GEOMETRIC CONCEPTS OF LOCAL CHANGES AND CUMULATIVE EFFECTS IN BASIC SECONDARY EDUCATION FOR GRADES 8° AND 9°

ABSTRACT

The study of real functions usually begins in eighth and ninth grade with students aged 14 to 16. Generally, some of their attributes, different representations, equation solving, and various applications are studied, without any priority given to the meaning of local variation and the accumulation of these changes over an interval. This may be the cause of the gap between algebra and future calculus, despite some of the objectives of the Basic Learning Rights (BLR) for these courses. The purpose of this article is to analyze the feasibility and demonstrate the educational value of progressively building notions of these concepts as an early conceptual bridge to the local and cumulative variation of linear and quadratic functions without technical formalisms, using estimates, comparisons, and refinements of approximations; of the slopes of the segments tangent to a set of their points and of the area under the graphs in some interval of their domain; through the usual geometric constructions with pencil and paper, simulators, or software. The methodology corresponds to a theoretical-didactic essay as an exercise in didactic awareness to address variational thinking from a geometric visualization perspective. The central proposal rests on the feasibility of introducing these ideas, given their alignment with the DBA for grades 8 and 9 in Colombia. It is hoped that this early articulation will transform the understanding of these functions from a static to a dynamic view that supports the previous concepts for introducing the study of calculus.

Keywords. Local Variations, Cumulative Effects, Linear Functions, Quadratic Functions, Geometric Visualizations.

Introducción

La correlación entre variables es un insumo indispensable en el desarrollo de las ciencias exactas y naturales, porque con ella se pretende al menos, por un lado, describir con la mayor precisión posible la manera como las variables independientes impactan a la dependiente y, por otro, aproximarse con el mínimo error a valores predictivos de las variables. El proceso de aprendizaje y posterior conocimiento general de estas correlaciones inician con un conjunto de saberes previos correspondientes a las reglas de cálculo simbólico de expresiones algebraicas -polinomios, raíces, potencias, logaritmos- basadas en las leyes para simplificar operaciones entre números Reales.

Asimismo, el proceso continúa con la introducción de la noción de función de variable real -números Reales como valores de las variables- definiéndola como una relación especial entre variables -existencia y unicidad de la imagen para toda preimagen o elemento del dominio- dándole prelación al reconocimiento de atributos fundamentales como su dominio, su rango, su representación analítica, sus tipos de gráficas, construcciones tabulares, traducciones verbales, aplicaciones varias, e inclusive otras características como biyectividad -inyectividad y sobreyectividad-, paridad, imparidad, entre otras; y las condiciones de su función inversa.

Como puente conceptual temprano al estudio profundo de relaciones y funciones, entre los grados 8° y 9°, se inicia habitualmente con el estudio de funciones lineales, cuadráticas, cúbicas, radicales, exponenciales y logarítmicas; con la intención de dar luces de los elementos que constituyen estas nociones, algunos de estos mencionados en el párrafo precedente. Sin embargo, por lo general se ignoran las reflexiones o conclusiones que se pueden deducir de dos comportamientos importantes de este tipo de funciones básicas como son, los cambios locales y los efectos acumulados en el transcurso de un intervalo del dominio de esos cambios puntuales; quizá por considerarse como cuestiones sofisticadas para el desarrollo cognitivo de los estudiantes cuyas edades fluctúan entre los 14 a 16 años, siendo una de las justificaciones más compartidas por muchos docentes.

Sin embargo, la historia muestra ejemplos de cómo gracias a procedimientos geométricos, según Boyer (1999, p. 129) los griegos con su método de exhaustión sin completar su razonamiento con el concepto de límite -método conocido aproximadamente dos milenios después- lograron fundamentar el cálculo de áreas y volúmenes de figuras curvas; y Galileo mencionado por Boyer (1999, p.320, 340, 413) con el uso de métodos basados en la semejanza de triángulos, trayectorias parabólicas con cambios que son múltiplos de los números impares y la noción de lo infinitamente pequeño; lograron importantes resultados que con el tiempo se pudieron constatar con

técnicas del Cálculo Diferencial e Integral cuya invención se le otorga a I. Newton y G. Leibniz siglos más adelante. Esto significa, que de alguna manera con ejemplos como los precedentes, se inició la fundamentación del Cálculo desde las visiones geométricas y numéricas; cuestión palmaria el día de hoy, puesto que la línea de tiempo histórica así lo ha demostrado desde mucho tiempo atrás -esto no es nada nuevo-.

Asimismo, algunos de los Derechos Básicos de Aprendizaje para el área de Matemáticas en Colombia (DBA) promueven el avance del desarrollo del pensamiento variacional, para 8° grado “Identifica y analiza relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de expresiones algebraicas y relaciona la variación y covariación con los comportamientos gráficos, numéricos y características de las expresiones algebraicas en situaciones de modelación” y “Propone relaciones o modelos funcionales entre variables e identifica y analiza propiedades de covariación entre variables, en contextos numéricos, geométricos y cotidianos y las representa mediante gráficas (cartesianas de puntos, continuas, formadas por segmentos, etc.).”, MEN, (2016, p.63 y 64); y para 9° grado, “Utiliza los números reales, sus operaciones, relaciones y representaciones para analizar procesos infinitos y resolver problemas.”, y “Utiliza procesos inductivos y lenguaje simbólico o algebraico para formular, proponer y resolver conjeturas en la solución de problemas numéricos, geométricos, métricos, en situaciones cotidianas y no cotidianas.”, MEN, (2016, p.67 y 71).

En consonancia con lo anteriormente expuesto, en este ensayo teórico-didáctico se pretende argumentar la viabilidad y el valor didáctico de introducir las nociones de variación local y acumulación en un intervalo del dominio en funciones lineales y cuadráticas, desde un enfoque geométrico, numérico e intuitivo; con el apoyo de tecnologías digitales como simuladores o construcciones en algún software educativo como Geogebra, sin subestimar o excluir las construcciones en lápiz y papel milimetrado (cuadriculado); para facilitar la articulación conceptual entre el estudio de funciones elementales en educación básica secundaria y el aprendizaje posterior de herramientas del cálculo.

Pensando en la fundamentación del enfoque de este artículo, grosso modo se tienen en cuenta algunos principios y aspectos de tres marcos de referencia conceptual; dos teorías del conocimiento como lo son la Socioepistemología y el Enfoque Ontosemiótico, y un principio de la teoría Sociocultural referente a la Zona de Desarrollo Próximo. Para comenzar, la Socioepistemología según Cantoral, (2011); como se cita en Ortiz, (2013, p.67); analiza la naturaleza y evolución del conocimiento matemático, adoptando una postura pragmática que sostiene que este conocimiento se construye y se comprende, en su uso y aplicación dinámica, más que en su enunciado estático; emergiendo y validándose en las prácticas sociales, históricas y culturales. En virtud de ello, se hace una crítica a los enfoques de enseñanza basados únicamente en las

definiciones y procedimientos, por caer posiblemente en un reduccionismo ante la complejidad de los procesos de aprendizaje de esta área.

Ahora, del principio de la Zona de Desarrollo Próximo (ZDP) de Vygotsky, se puede extraer que la instrucción sirve de andamiaje para ubicar el aprendizaje en la mejor posición posible, la cual puede realizarse sistemáticamente en ambientes escolares, en concordancia con: “La instrucción, ... despierta y engendra toda una serie de funciones que se hallaban en estado de maduración y permanecían en la zona de desarrollo próximo. En eso consiste precisamente el papel principal de la instrucción en el desarrollo.” Vygotsky, (1956, p. 141-142). También, el potencial del trabajo en equipo, colaborativo o cooperativo, para avanzar en los procesos de aprendizaje.

Finalmente, el Enfoque Ontosemiótico para la investigación en Educación Matemática, que de acuerdo con Díaz-Godino, (2024, p. 274-275); a los procesos Educativos-Instruccionales convergen y están ligadas seis (6) facetas que conforman un sistema de criterios para su optimización denominado Idoneidad Didáctica de un Proceso de Instrucción, cuyo foco está en el grado de adquisición de significados de los objetos y procesos matemáticos contruidos por los estudiantes, con relación a los signos y significados institucionales que los configuran o que se implementan en el proceso de enseñanza-aprendizaje, teniendo en cuenta el contexto comunicativo en el que se realizan y los posibles conflictos que se presentan.

Las consideraciones anteriores pueden orientar la respuesta a la pregunta, ¿en qué medida las acciones de estimar, comparar y refinar aproximaciones de pendientes y áreas bajo las gráficas de funciones lineales y cuadráticas, aprovechando las representaciones geométricas, tabulares, aritméticas, verbales, y las respectivas transformaciones entre estas representaciones de los objetos precedentes; ayudan a comprender y avanzar en las nociones de cambio local y efecto acumulado en un intervalo del dominio de estas funciones; en los contextos de aprendizaje de los grados 8° y 9° de educación básica Colombiana?

Desarrollo temático

Tratando de profundizar en los marcos de referencia conceptual precedentes y de encontrar puntos en común entre los mismos para viabilizar el avance del aprendizaje de las nociones matemáticas en cuestión y adoptar un referente para su análisis, se presenta la siguiente síntesis de los mismos. Con respecto a la Socioepistemología, en Espinosa (2015, p.3), se enuncia que la tesis fundamental de esta teoría consiste en vincular el conocimiento matemático con algunas funciones sociales o prácticas establecidas en un contexto histórico, cultural e institucional, que de alguna manera pueden ser cotidianas para las personas, esto es; fracciones del conocimiento matemático tienen una alta probabilidad de originarse en ciertas actividades humanas.

Esto equivale a tener otra lente diferente de los sistemas matemáticos más allá de una especie de lenguaje simplificado de relaciones o transformaciones traducidas en cadenas simbólicas que siguen una lógica predeterminada, más bien; interpretar estos sistemas como una componente de las posibles maneras de dar respuesta a problemas auténticos, o un estilo de pensamiento cuya misión es aproximarse a resolver desafíos contextualizados. Así, se pone la mirada en la praxis social dándole menos prioridad al concepto como tal, en otras palabras; más foco a las actividades humanas que a los algoritmos.

De la misma manera, en las reflexiones hechas por Báez y Farfán, (2022, pp. 42), sobre lo que ellas denominan "El modelo reflexivo en la Socioepistemología" se ilustra el elemento esencial de los propósitos de la Teoría Socioepistemológica en la Educación Matemática TSME. Aquí se plantea puntualmente que el conocimiento matemático es una construcción que se da en el entramado social y adquiere sus significados y usos con base en las prácticas contextuales que legitiman su razón de ser. Esta afirmación es bastante importante y aunque no es el objetivo principal para los autores de este artículo, debe ser examinada con algún detalle de rigurosidad; dado que mucho conocimiento matemático a través de la historia se ha construido a partir de verdades necesarias, más que de una construcción de tipo social, esto sin llegar a confundir que sus resultados se publican y se disponen para que la comunidad de

matemáticos los analicen y si hubiere lugar, en su estructura lógica, se depuren y generen más conclusiones necesarias que amplifiquen los alcances teóricos.

En esta misma línea de pensamiento, su significado y razón de ser no necesariamente está ligado a un contexto social para su justificación. Entonces, para los fines de la futura propuesta en este escrito, este postulado de la TSME se debe considerar para la fracción del conocimiento de esta ciencia que pueda validarse en los ámbitos naturales, sociales, históricos e institucionales en su máxima expresión -por ejemplo, el conocimiento del universo-; esto es, en el escenario y fundamentación de la Educación Matemática. Sin embargo, La finalidad y el alto valor didáctico de este primer planteamiento de la TSME, apunta a resignificar el conocimiento matemático con énfasis en su funcionalidad "culturalmente situada" Cantoral et al., (2014), como se cita en Báez y Farfán, (2022, pp. 43), es decir; su uso, significado y sentido humano, preferiblemente en las prácticas sociales más cercanas del entorno, tanto de los estudiantes como de docentes y demás integrantes de la comunidad educativa; esperando provocar con ello un compromiso social u otra forma de relacionarse con el conocimiento matemático.

También, en Morales, Mena y Mena, (2024, pp.10-13) se hace mención de algunos atributos importantes de la TSME, tales como la construcción social del conocimiento donde el foco central del proceso de enseñanza son las prácticas sociales

relevantes de los actores educativos no necesariamente en los escenarios escolares, el conocimiento matemático funcional para comprender el mundo y transformarlo, rediseño del discurso matemático escolar en el cual se resignifica el conocimiento matemático permitiendo a los estudiantes hacer aportes genuinos para construir tal conocimiento y enfatizar en su uso y significado desde la cotidianidad, la modelación como producto comunitario de abordar y dar solución a retos matemáticos y la graficación vista en rol de facilitadora para la extracción de la información favoreciendo el desarrollo de habilidades conectadas con el razonamiento, la argumentación, toma de decisiones y comunicación de resultados.

Atendiendo a los aportes de esta teoría, para el caso de las variaciones puntuales de las funciones lineales y su posterior efecto acumulado, se deben identificar y asociar acciones humanas cuyos propósitos estén relacionados con cambios constantes tanto en la variable dependiente como en la variable independiente; y para el caso de las variaciones puntuales de las funciones cuadráticas, con aquellos cambios que describan en cada avance de la variable independiente una conexión sucesiva de avances o retrocesos en la variable independiente que formen una serie con números múltiplos reales de los números impares.

Esta es una tarea que amerita un gran esfuerzo por parte de docentes y estudiantes, dada la importancia de diferenciar entre actividades de praxis social,

histórica e institucional, y entre aplicaciones de los sistemas matemáticos; es decir, la forma en que los cambios se presentan en las cantidades -variables- que se relacionan por medio de la función lineal y de la función cuadrática pueden tener por ejemplo, por un lado; la función social de la optimización -una acción mayoritariamente humana-, y por otro lado, una aplicación a la descripción de movimientos como la caída de los cuerpos -una acción no necesariamente humana-. Otro ejemplo para el caso de las variaciones puntuales puede ser, la necesidad de entender ¿qué tan rápido ocurren los cambios de eventos en un instante específico -pequeño intervalo de tiempo- para controlar o predecir sus consecuencias como efectos acumulados de esas variaciones?

En el caso específico de los efectos acumulados, tal como lo expresan Cabañas y Cantoral (2006, p.13), las funciones sociales pueden corresponder a repartir -distribuir equitativamente, comparar y reproducir -un efecto con respecto a otro-, medir y cuantificar -valorar un efecto- y conservar -invarianza de los efectos por cambio de variables o por transformaciones como traslaciones, rotaciones, recomposiciones, entre otras. Así, queda claro entonces, que el enfoque Socioepistemológico otorga supremacía a los escenarios de las funciones sociales de los sistemas matemáticos, sobre las aplicaciones en diversos contextos.

Con relación a la Zona de Desarrollo Próximo de Lev Vygotsky, en Gutiérrez et al. (2006, pp.10-12), se describen algunos atributos de especial interés para la ocurrencia

del aprendizaje. Uno, la mediación semiótica, a través de instrumentos que median nuestra relación con el mundo y potencian el aprendizaje, esto es; herramientas que realizan transformaciones físicas del entorno, o los sistemas simbólicos -signos- como el lenguaje y las matemáticas, que por una parte ayudan a organizar el pensamiento, y por otra permiten la interacción cotidiana. Dos, la interacción sociocultural que promueve la construcción colectiva del conocimiento.

Una forma en que contribuye la ZDP al propósito de este artículo es el análisis del uso de herramientas análogas como el lápiz y papel, y digitales como las simulaciones en red o el software Geogebra, para generar vínculos de los cambios instantáneos y los efectos acumulados en un intervalo del dominio con algunas visualizaciones de elementos geométricos; pues a partir de ellas, se reconocerán nuevas relaciones que se originan de las funciones lineales o cuadráticas, que en un nivel de maduración superior se resignificarán como Operadores de Funciones. También, la observación de la interacción sociocultural entre pares y entre docentes-estudiantes que promueve la contrastación de ideas y la construcción cooperativa del aprendizaje y posterior conocimiento.

Por último, los criterios de idoneidad didáctica para una propuesta vista como fenómeno didáctico desde el Enfoque Ontosemiótico para la investigación en Educación Matemática. Las seis facetas descritas por Díaz-Godino, (2024, p. 280-294); encajan de

manera adecuada en el contexto de estas ideas y las más concernientes para el análisis de la propuesta son; la faceta epistémica, cognitiva, mediacional, la interaccional y la ecológica. La idoneidad emocional se considera como un fenómeno que merece un planteamiento en un plano especial que posiblemente desborde la pretensión de este documento. A continuación, se presenta una descripción resumida de cada una de las cinco facetas que orientarán los criterios de construcción y evaluación de la propuesta en este artículo.

De acuerdo con Díaz-Godino, (2024, p. 280-284), la idoneidad epistémica se refiere a la calidad del contenido matemático que se enseña, el cual debe ser muy nutrido, óptimo y adecuado a las circunstancias contextuales y personales de los estudiantes. Esta idoneidad se analiza con base a los siguientes criterios:

- Situaciones problema; cuando se aprende por medio de una muestra representativa y articulada de problemas de contextualización, ejercitación, aplicación y generación.
- Lenguajes representativos; si los estudiantes asimilan diferentes formas de expresión (verbal, gráfico, simbólico, tabular) y se promueven las transformaciones entre una y otra.
- Conceptos, proposiciones y procedimientos; si se ponen en práctica estos tres elementos fundamentales del tema de interés, de manera correcta, articulada y adaptada al nivel educativo.

- Argumentos; si los estudiantes argumentan las soluciones, procedimientos y explicaciones propias o de los demás, con base a su nivel de conocimiento.
- Conexiones; si los estudiantes aumentan su capacidad de transferir conocimientos matemáticos a contextos propios o de otras ciencias.
- Procesos, si aprenden holísticamente teniendo en cuenta los principales procesos de la actividad matemática como: resolución de problemas, modelación, comunicación, razonamiento, formulación, comparación y ejercitación de procedimientos, memoria de trabajo matemático.

Con respecto a la idoneidad cognitiva, Díaz-Godino, (2024, p. 294-297), la relaciona con la "zona de desarrollo próximo" de Vygotsky, en el sentido en que las metas de aprendizaje representen un reto cognitivo alcanzable para los estudiantes, considerando sus conocimientos previos y circunstancias individuales.

La idoneidad cognitiva se puede analizar teniendo en cuenta:

- La forma como se tienen en cuenta los conocimientos previos de los estudiantes para ampliar su red de conocimientos matemáticos.
- La manera de impulsar la comprensión de las situaciones problema, representaciones, conceptos, propiedades, ejemplos, contraejemplos y aplicaciones de los objetos matemáticos.
- El desarrollo de competencias comunicativas, procedimentales, argumentativas y metacognitivas.
- El modo como se fomenta de manera sistémica las relaciones y transformaciones de los conceptos y procedimientos matemáticos, llamado aprendizaje relacional.

- El desarrollo de procesos afines a las competencias para la modelización, generalización, memoria de trabajo y planteamiento y resolución de problemas.
- La aplicación del principio de equidad didáctica cuando se apoya el aprendizaje teniendo en cuenta las diferencias en conocimientos, estilos de aprendizaje y niveles de competencia de la diversidad de estudiantes bajo su responsabilidad.
- El empleo de la evaluación formativa para comprobar regularmente el progreso y tomar decisiones instruccionales de mejora.

En Díaz-Godino, (2024, p. 286-290), se muestra que la idoneidad mediacional está encaminada hacia el examen de los recursos y medios que por un lado condicionan y por otro apoyan directamente la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. El deber ser es disponer de recursos adecuados para el desarrollo óptimo del proceso de aprendizaje.

Los criterios de análisis son:

- Recursos Materiales y Tecnológicos, siendo lo más importante la decisión de cuándo y cómo usarlos como apoyo efectivo al proceso de estudio. Algunos de los más utilizados son: Medios concretos como libros de texto, cuadernos, tecnológicos como calculadoras, ordenadores, software de geometría dinámica, applets, hojas de cálculo, IA Generativa y vídeos educativos.
- Recursos organizacionales, que favorecen la atención personalizada y facilitan las interacciones entre los estudiantes, tales como el número de estudiantes por clase, condiciones materiales del aula, y la distribución de los estudiantes en el espacio, entre otras.

- Recursos temporales, como la asignación de tiempos adecuados para la enseñanza proyectada, intervalos que favorezcan la atención, comprensión y avance en el desarrollo de habilidades afines con el conocimiento matemático; entre ellos, el tiempo total asignado al estudio presencial y no presencial, horario de las clases y distribución del tiempo entre los contenidos.

Otra faceta es la idoneidad interrelacional, según lo planteado por Díaz-Godino, (2024, p. 290-294), el grado de conciencia que alcanzan los estudiantes sobre el desarrollo de sus habilidades inter e intrapersonales, para identificar conflictos semióticos potenciales, gestionar los medios para resolverlos, favorecer tanto la autonomía progresiva en el aprendizaje, como el desarrollo de competencias comunicativas, de trabajo en equipo y colaborativo, y maneras de validar su conocimiento como consecuencia de la interacción social. Todo esto en beneficio del perfeccionamiento de su aprendizaje.

Algunos criterios específicos para guiar y evaluar las interacciones en el aula pueden ser:

- Interacciones Docente-Estudiantes, donde cobra gran importancia la adaptación de los modos de interacción según el momento del proceso de aprendizaje, la realización de presentaciones claras, bien organizadas y con énfasis en los conceptos clave, el diseño de preguntas y fomento de respuestas adecuadas, la búsqueda de consensos basados en el mejor argumento, el uso de diversos recursos persuasivos para captar la atención de los estudiantes, la inclusión de

todos los alumnos en la dinámica de la clase, y el fortalecimiento de la participación y el compromiso activo de todos los estudiantes.

- Interacciones entre estudiantes, el favorecimiento del el diálogo y la comunicación asertiva entre los estudiantes, como la inclusión en los equipos de trabajo, evitando a toda costa la exclusión.
- Avances en el desarrollo autónomo de los estudiantes, abriendo espacios y tiempos donde ellos asuman la responsabilidad de su aprendizaje en los cuales puedan plantear cuestiones, presentar soluciones, investigar la validación de conjeturas, entre otros. Adicionalmente, mostrar y ejemplificar un conjunto valioso de herramientas para razonar, hacer conexiones, resolver problemas y comunicarlos.

Con correspondencia con lo señalado por Díaz-Godino, (2024, p. 284-286); la idoneidad ecológica parte del reconocimiento de la complejidad del proceso educativo, condicionada por la sociedad, la escuela y la cultura; por consiguiente, la idoneidad ecológica se centra en evaluar cómo una instrucción matemática se adecúa al entorno en el que se desarrolla. El "entorno" en este enfoque, se define como todo aquello que condiciona el desarrollo del aprendizaje fuera del aula, tal como se mencionó antes; la sociedad, la escuela, la pedagogía y la didáctica de las matemáticas. Se espera que la práctica educativa responda a las pretensiones del P.E.I. Proyecto Educativo Institucional, el currículo y los condicionamientos del entorno, apoyada en las

innovaciones basadas en los productos de la investigación en Educación Matemática.

Algunos componentes clave de la idoneidad ecológica son:

- Adaptación Curricular, cuando se hace el esfuerzo por relacionar los conceptos y habilidades matemáticas con otros contenidos intra e interdisciplinarios. También, al proponer un estudio progresivo y articulado de los conceptos y habilidades en los distintos niveles educativos, graduando su generalidad y formalización.
- Apertura a la Innovación Didáctica, cuando se introducen innovaciones basadas en la investigación y en buenas prácticas reconocidas y se integra el uso de las nuevas tecnologías digitales disponibles como calculadoras, ordenadores, IA Generativa, entre otras; en el proyecto educativo.
- Conexiones Socio-profesionales, buscando vínculos claros entre el aprendizaje y la formación socio-profesional de los estudiantes.
- Formación en valores democráticos y el desarrollo del pensamiento crítico.
- Conexiones con el entorno extraescolar, estimulando el aprendizaje continuo en contextos fuera de la escuela para fortalecer su desarrollo como persona.

En un intento de cierre articulador, se puede notar que la faceta de idoneidad ecológica se relaciona estrechamente con la emergencia y validación del conocimiento matemático propuesta en los principios de la Socioepistemología, y la idoneidad mediacional comparte propósitos con la ZDP desde el andamiaje de que ofrecen las herramientas utilizadas en las prácticas pedagógicas. Estas dos relaciones permiten para la intencionalidad de este escrito, hacer una inmersión de la Socioepistemología y

la ZDP en un único análisis de la propuesta de innovación curricular en confrontación con los criterios y lineamientos del enfoque Ontosemiótico.

Así pues, con base en estas referencias, a continuación se desarrolla la propuesta para iniciar la comprensión de las nociones de cambio local y efecto acumulado en un intervalo del dominio de funciones lineales y cuadráticas en los grados 8° y 9° de educación básica en el contexto de la educación en Colombia. Es bueno recordar, que la propuesta estriba en analizar la viabilidad y el valor didáctico de la articulación temprana de estas nociones, más que en presentar una secuencia didáctica estructurada; sin embargo; se insinúan algunas referencias básicas o fundamentales para emprender su aplicación, dado que, encontrar las praxis sociales y los recursos didácticos, es una tarea para los intérpretes principales del acto educativo o la motivación para realizar otro tipo de artículo.

Proposición

En consonancia con las descripciones precedentes del marco referencial, en este artículo se propone analizar la viabilidad y mostrar el valor didáctico que puede obtenerse, con la introducción temprana de nociones intuitivas sobre cambios locales y efectos acumulados en funciones lineales y cuadráticas en los grados 8° y 9°, sacando provecho del estudio de algunas de las diferentes representaciones de estas funciones - gráfica, tabular y verbal- y las transformaciones entre ellas, para realizar estimaciones,

comparaciones y refinamiento de aproximaciones de pendientes y áreas bajo las gráficas en intervalos de sus respectivos dominios.

Argumentos

En concordancia con lo escrito hasta el momento, se presentan tres argumentos que favorecen las condiciones de puesta en práctica y calidad de la instrucción para generar conocimiento matemático significativo en los estudiantes, a partir de la propuesta en cuestión. Una evidencia puede relacionarse con los hechos históricos y epistemológicos expuestos en un par de ejemplos en la introducción de este artículo, concernientes a los avances realizados por civilizaciones en la antigüedad para consolidar los conceptos de variación local y acumulación de efectos dados por las variaciones instantáneas. Al respecto, en Boyer (1999), se hace un análisis diacrónico en el cual se demuestra que las nociones que preceden a estos conceptos de variación local y efecto acumulado en intervalos del dominio parten de las manipulaciones de tipo geométrico y numérico, de problemas de medición y variación en ausencia del paso al límite.

En la presente propuesta se hace la invitación a abrirle espacio y tiempo de manera progresiva, tanto a la medición intuitiva de los valores de las pendientes de los segmentos que son tangentes a un grupo discreto de puntos del dominio, como a la estimación aproximada y refinada de las áreas bajo las gráficas de las funciones

lineales y cuadráticas en un intervalo de su respectivo dominio; de una manera muy parecida a las técnicas que utilizaban o como lo visualizaban las antiguas sociedades dentro del marco de su conocimiento matemático.

Otra razón son los DBA para el área de Matemáticas también referidos en la introducción, los cuales ponen en el radar de estas prácticas educativas, las reflexiones sobre la variación, covariación de las variables analizados en los comportamientos gráficos y numéricos de las funciones, además del fomento de procesos inductivos para analizar procesos infinitos, formular, proponer y resolver conjeturas en contextos cotidianos. En la futura propuesta se sugiere la construcción de tablas y gráficas, tanto de los valores numéricos estimados y refinados en sus aproximaciones, de las pendientes de los segmentos tangentes, como de las áreas bajo las gráficas; para analizar el tipo de relación que se forma con los elementos del dominio de las funciones base -lineales y cuadráticas- y hacer conjeturas o comparaciones con base en las imágenes mentales que construye el grupo de estudiantes, apoyados en herramientas análogas o digitales.

Un argumento final se basa en que la experiencia docente muestra que la estimación geométrica y numérica reduce el trabajo con expresiones algebraicas - trabajo simultáneo entre las diferentes representaciones- y por tratarse de actividades más familiares realizadas en sendas oportunidades durante el proceso de aprendizaje

previo -de años anteriores- de los estudiantes, mejoran la comprensión de los conceptos porque sus nociones se construyen desde significados intuitivos que se potencian con el apoyo de artefactos digitales. Al respecto, Presmeg (1999), como se cita en Díaz, (2007, p.207), expone que el cambio conceptual de los estudiantes se ve favorecido por las generalizaciones que producen estos actores, las cuales son más efectivas con el uso de representaciones visuales y descriptivas.

Adicionalmente a los argumentos, es relevante advertir posibles tensiones que se puedan generar en el aula, relacionadas con el lenguaje y el uso de las representaciones analíticas para calcular con precisión los cambios instantáneos y las áreas bajo la curva de las funciones estudiadas. Al respecto se declara, que la intención de la propuesta deslinda el uso de términos técnicos, definiciones formales, reglas de cálculo en los procesos de aproximación conceptual, es decir; se excluyen de la propuesta alusiones a las definiciones de las derivadas e integrales de estas funciones por medio de límites, uso de términos como la derivada de una recta o de una curva cuadrática, como la integral de una función lineal o cuadrática, las notaciones $\frac{df(x)}{dx}$ o cualquier otra de las derivadas y la notación $\int_a^b f(x)dx$, y las fórmulas para derivar o integrar este tipo de funciones.

Propuesta

Elementos para el diseño de enfoques didácticos que potencien la comprensión dinámica de los cambios locales y efectos acumulados en intervalos del dominio de funciones Lineales y Cuadráticas

El objetivo de esta iniciativa es proponer ideas concretas -que pueden verse como ejemplos- para enriquecer los procesos de aprendizaje y posterior conocimiento de la rapidez como cambian las variables que se relacionan con el estudio de funciones lineales y cuadráticas y los efectos acumulados de estas variaciones en intervalos de sus respectivos dominios, a propósito de la enseñanza introductoria a las funciones de variable real que se desarrolla en los grados de 8° y 9° de educación matemática en Colombia.

El cuerpo de la propuesta, en consonancia con la fundamentación teórica, se esfuerza por invitar a inspirarse en prácticas sociales, históricas e institucionales auténticas, que motiven la construcción de significados de alto potencial, como producto de tareas de carácter intuitivo basadas primordialmente en manipulaciones visuales y cálculos numéricos con operaciones básicas; que se enriquecen con el uso de tecnologías digitales.

Se insiste en evitar confundir el conjunto de ideas subsiguientes con un plan de clase o con una secuencia didáctica estructurada; más bien, vincularlo con un fenómeno didáctico con posibilidades de ser analizado desde criterios de idoneidad

ontosemióticos, para sustentar su factibilidad práctica o posibilidades de aplicación concreta en los contextos tempranos de los grados mencionados, además de observar la potencialidad de su probable mérito pedagógico. Este análisis se presenta con base en la siguiente estructura: (a) título, tipo de función, lineal o cuadrática; (b) propósito, interpretado como la aspiración o visión futura conceptual a lograr, a partir de supuestos que determinan el nivel de desarrollo de los preconceptos necesarios para abordar las nociones de cambio local o efecto acumulado en un intervalo del dominio de la función; (c) objetivo, entendido como el logro concreto con los objetos matemáticos a disposición; (d) actividades sugeridas o ejemplos para su ejecución, al menos una por cada noción, cambio local o efecto acumulado en un intervalo del dominio de la función; (e) análisis de la actividad. Una vez se describa la actividad se desarrolla el análisis en relación con los criterios de idoneidad didáctica del Enfoque Ontosemiótico, incluida la gestión de tensiones, esta última en términos de posibles alertas para evitar exceder la intención de la propuesta.

Función Lineal.

Propósito. Tener un primer contacto con la noción de razón de cambio constante, suponiendo que ya ha estudiado los atributos fundamentales de la función lineal como su pendiente m , la relación de ésta con la inclinación de la recta y ha desarrollado la habilidad de transformar representaciones tabulares a gráficas y viceversa.

Objetivo. Entender por qué la razón de cambio en una función lineal es constante para todo punto de su dominio y por qué el efecto acumulado de ese cambio constante en un intervalo corresponde al área bajo la gráfica del cambio contra el tiempo.

Actividades sugeridas.

Primera actividad. En la casa de uno de los estudiantes del curso sucede que una de las llaves de paso de agua en uno de los lavamanos, gotea continuamente; y por alguna circunstancia, aún no se ha dado solución a la situación. El estudiante preocupado por el gasto innecesario de este recurso tan valioso decide demostrar a los responsables del lugar donde habita, las consecuencias de darle ninguna prelación a la solución. Para lograr entender cómo se está desperdiciando el agua, el estudiante le consulta la situación a su profesor de matemáticas, el cual le sugiere realizar las siguientes acciones:

- Medir el volumen de agua desperdiciada en un intervalo de tiempo. Para este caso, el estudiante obtiene que cae una gota cada 10 segundos.
- Si el volumen de agua que contiene cada gota, según lo consultado en la red, es aproximadamente de 0,004 ml (mililitros); hacer una tabla de los valores de volumen desperdiciado en algunos intervalos de tiempo.

Tabla 1.

Volumen de Agua desperdiciado en el tiempo

t (s)	10	20	30	40	50	60
V (ml)	0,04	0,08	0,12	0,16	0,20	0,24

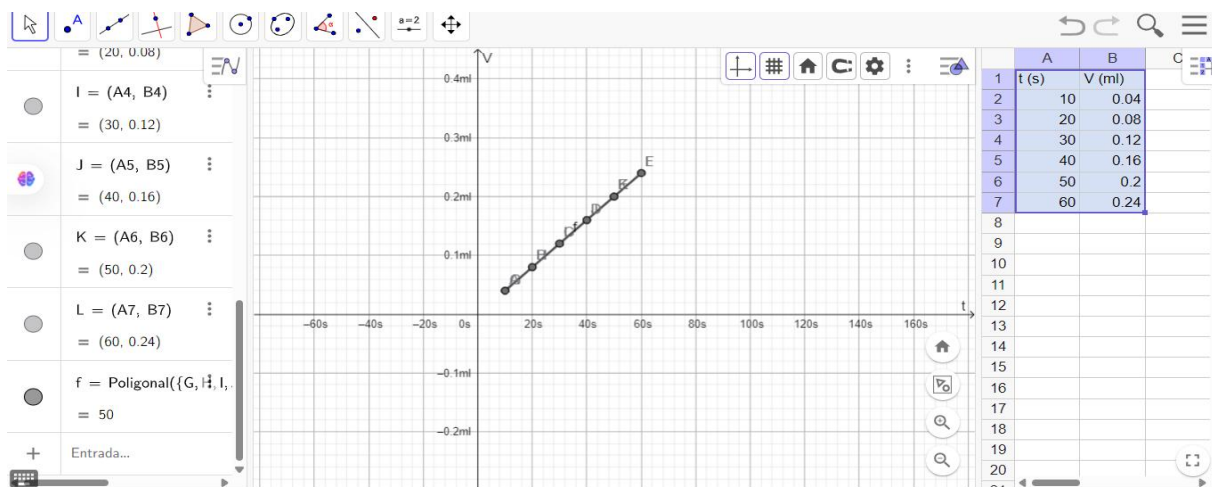
Nota. ml es mililitros y s es segundos. Elaboración propia.

- Construir una gráfica con los valores de la tabla utilizando papel y lápiz o Excel o Geogebra; teniendo en cuenta que la gota se forma continuamente y cae cuando el

peso de la misma no se puede soportar en la boquilla de la llave, después, unir todos los puntos en el plano para descubrir que se trata de una función lineal.

Figura 1.

Construcción de la gráfica del Volumen de Agua desperdiciado en el tiempo



Nota. Uso del Software Geogebra para construir gráficas a partir de valores de una tabla. Elaboración propia.

- Consultar con algunos compañeros de clase algunas inquietudes que se generan, teniendo en cuenta que:

✓ En la página del acueducto aparece que la cantidad de agua que sale por el tubo es constante, y lo denominan Caudal cuya una ecuación es:

$$Q = \frac{\Delta V}{\Delta t} \quad (1)$$

En la ecuación 1, ΔV es el cambio de volumen medido en ml en un intervalo de tiempo Δt medido en s, es decir, Q está medido en ml/s .

¿Cómo se puede calcular el Caudal Q a partir de la gráfica y por qué en el acueducto afirman que es constante?

✓ ¿Cuáles puntos se deben escoger para calcularlo?

Los estudiantes deben encontrar que $\Delta V = V_{final} - V_{inicial}$ y que $\Delta t = t_{final} - t_{inicial}$, luego, para calcular el Caudal Q ; deben dividir estos cambios; sin importar qué par de puntos (t_{final}, V_{final}) y $(t_{inicial}, V_{inicial})$ tengan en cuenta, por ejemplo, tomando $(10\text{ s}, 0.04\text{ ml})$ como punto inicial y $(40\text{ s}, 0.16\text{ ml})$ como punto final, da como resultado $Q = \frac{0.16\text{ ml} - 0.04\text{ ml}}{40\text{ s} - 10\text{ s}} = \frac{0.12\text{ ml}}{30\text{ s}} = 0.004\text{ ml/s}$; y ahora, si $(30\text{ s}, 0.12\text{ ml})$ es el punto inicial y $(60\text{ s}, 0.24\text{ ml})$ es el punto final, el resultado es $Q = \frac{0.24\text{ ml} - 0.12\text{ ml}}{60\text{ s} - 30\text{ s}} = \frac{0.12\text{ ml}}{30\text{ s}} = 0.004\text{ ml/s}$, lo cual demuestra que el Caudal es el mismo sin importar el par de puntos elegidos -invariante frente a la selección del par de puntos-.

Además, en conversaciones con el docente se percatan de que la Pendiente m de la función lineal corresponde al Caudal Q de la situación planteada, y cómo lo habían reflexionado en clases anteriores de Matemáticas, comprenden por qué el Caudal es constante, deduciendo que el ritmo de agua perdida es el mismo siempre, hasta que resuelvan el problema en casa, gracias a expresiones de su profesor como, noten que en este tipo de comportamientos, ya sea aumentando o disminuyendo la cantidad de Caudal, la rapidez con que cambian los valores es la misma siempre.

Análisis de la primera Actividad.

- La praxis social o idoneidad ecológica corresponde a la preocupación de la persona por la pérdida de un recurso vital como el agua.
- Las herramientas o idoneidad mediacional, coherentes con el uso del software Geogebra, del cual debe conocerse con antelación su manejo técnico, especialmente en la transformación de las diferentes representaciones de una función lineal.

- La idoneidad interrelacional, cuando los estudiantes en grupo o en equipo resuelven las inquietudes, que en un diseño instruccional o secuencia didáctica, deben corresponder a preguntas intencionadas, cuya solución provoque la transferencia de significados al propósito y objetivo de la actividad.
- La idoneidad epistémica, en relación con los siguientes elementos:
 - ✓ Énfasis en el uso de la representación verbal sin terminología técnica. En el ejemplo, el uso de frases como ritmo constante, inclinación de la recta, tasa constante. También, llevando al estudiante a encontrar equivalencia entre la pendiente y los términos anteriores.
 - ✓ Relación con la primera parte del objetivo, esto es; comprender que la razón de cambio promedio en una función lineal es siempre la misma, sin importar cuál intervalo de tiempo se tenga en cuenta para calcularla. También, que esa razón de cambio corresponde a la inclinación de la función lineal y por ende a su pendiente.
 - ✓ Se desarrolla el proceso de modelación al transformar los datos de la tabla a la gráfica y el proceso de razonamiento cuando conjetura y comprueba que en cualquier intervalo de tiempo, el ritmo de volumen desperdiciado es el mismo, cuando conecta este ritmo con la pendiente y la inclinación de la recta, y en general, cuando resuelve la situación problema.
- La idoneidad cognitiva, cuando la actividad busca que se descubra la propiedad de constante para el ritmo de pérdida de agua y no se ofrece como un dato conocido, también, cuando se aplica la evaluación formativa al verificar sin miedo al error que el caudal no varía al tomar diferentes pares de puntos y establecer las razones de este resultado.
- Gestión de tensiones. En ningún momento se debe presentar la definición formal de derivada para demostrar que tiene un valor constante en una función lineal y el

docente procura utilizar términos como la rapidez en que crece el Caudal nunca cambia.

Segunda actividad. El estudiante le pregunta a su profesor ¿cuál podría ser la mejor manera de demostrar a los responsables del hogar, el verdadero desperdicio de agua?; a lo cual el profesor le responde que calcule el volumen total de agua que cae directamente a la cañería a ese ritmo constante. Para obtener este valor a partir de los datos disponibles, puede seguir las instrucciones a continuación:

- Construya una tabla que relacione el valor del caudal constante, con los tiempos de la primera tabla.

Tabla 2.

Caudal de Agua desperdiciada en el tiempo

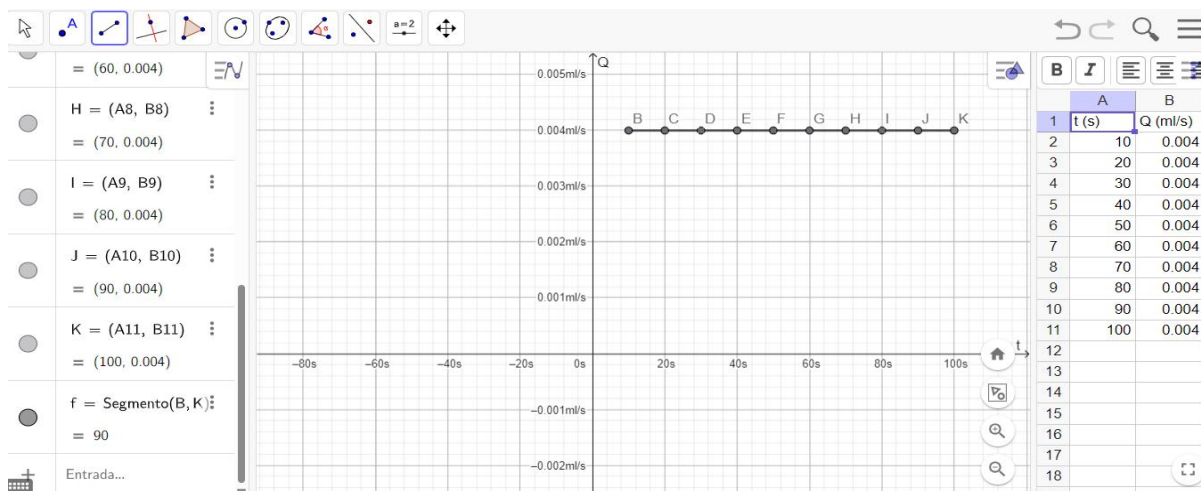
t (s)	10	20	30	40	50	60
Q (ml/s)	0,004	0,004	0,004	0,004	0,004	0,004

Nota. ml/s es mililitros por cada segundo y s es segundos. Elaboración propia.

- Ahora, construya una gráfica con los valores de la tabla en Geogebra, uniendo los puntos en el plano y responda ¿Qué tipo de función lineal se obtiene? - constante-

Figura 2.

Construcción de la gráfica del Caudal de Agua desperdiciado en el tiempo



Nota. Uso del Software Geogebra para construir gráficas a partir de valores de una tabla. Elaboración propia.

- De la ecuación 1 que define el Caudal, despeje la variable relacionada con el volumen.

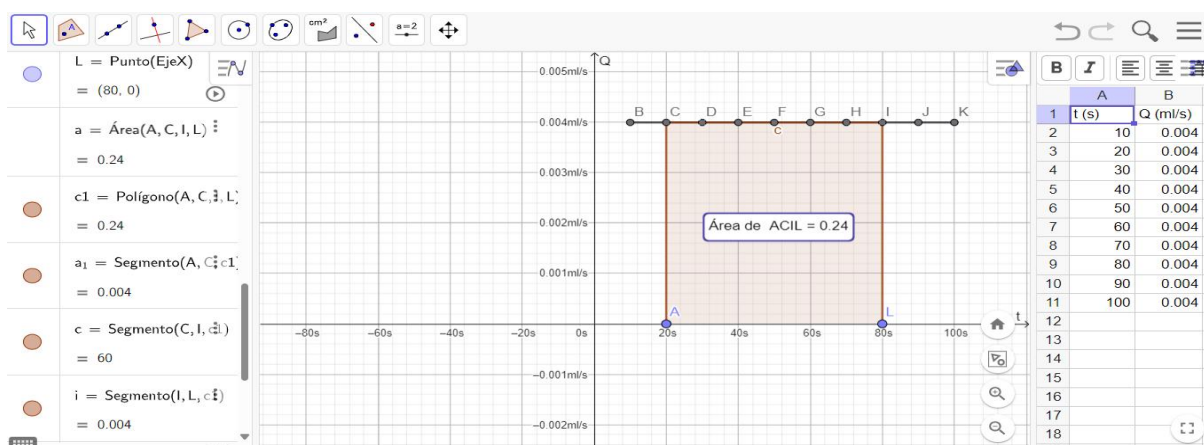
$$\Delta V = Q \cdot \Delta t \quad (2)$$

La ecuación 2, sugiere que para hallar el cambio del volumen ΔV en un intervalo de tiempo Δt , se multiplica el valor constante del Caudal Q por el tamaño del intervalo de tiempo. Consulta y discute con tus compañeros, ¿cómo hacer ese cálculo utilizando la gráfica de Q vs t ? La respuesta debe llevar a los estudiantes a descubrir que los valores del intervalo de tiempo Δt y del Caudal Q en la gráfica corresponden a la base y a la altura del rectángulo que se forma debajo de la gráfica de la función constante, tal como se muestra en la figura posterior.

Por ejemplo, si se quiere calcular el volumen de agua perdido entre los primeros 20 s y 80 s, se multiplica el valor de la base del rectángulo que corresponde con el intervalo de tiempo $\Delta t = 80s - 20s = 60s$ por el valor del Caudal $Q = 0.004 \text{ ml/s}$

que corresponde a la altura del rectángulo, obteniendo que el valor del volumen perdido en la cañería en ese intervalo es de $\Delta V = 0.004 \text{ ml/s} \cdot 60 \text{ s}$, es decir, $\Delta V = 0.24 \text{ ml}$.

Figura 3.
Construcción del área bajo el valor del Caudal que corresponde al volumen de Agua desperdiciado en el tiempo



Nota. Uso del Software Geogebra para construir áreas de polígonos formados bajo la gráfica de una función. Elaboración propia.

- Con esta lógica, se puede predecir el volumen de agua desperdiciado en un día, en una semana o en cualquier intervalo de tiempo mayor, antes de darle solución al problema. Por ejemplo, en un día que tiene 86400 s, el volumen desperdiciado será, $\Delta V = 0.004 \frac{\text{ml}}{\text{s}} \cdot 86400 \text{ s} = 345,6 \text{ ml}$, más de un tercio de litro, lo cual quiere decir que en tres días se habrá desperdiciado algo más de un litro y en una semana, casi tres litros. Estos valores corresponden al efecto acumulado del goteo de agua en algunos intervalos de tiempo. ¿Podría predecirse cuánto dinero se está perdiendo cuando se registre el consumo de agua en dos meses?

- El profesor aprovechando este contexto, le pregunta al grupo de estudiantes que si en el gráfico se cambia Caudal por Velocidad constante de un automóvil, ¿Qué acumularía el automóvil en la medida que transcurre el tiempo?

Análisis de la segunda actividad.

- La praxis social o idoneidad ecológica corresponde a la planificación del impacto que trae el desperdicio del agua.
- Las herramientas o idoneidad mediacional, en el ejemplo son idénticas a la actividad uno con respecto a las transformaciones tabulares a gráficas, adicionando el cálculo de áreas debajo de la gráfica de la función constante.
- La idoneidad interrelacional, de la misma manera que en la actividad uno al resolver el reto de calcular el cambio del volumen con los datos de la gráfica Q vs. Δt estimulando la transferencia del significado de área al volumen acumulado de agua desperdiciada.
- La idoneidad epistémica, en relación con los siguientes elementos:
 - ✓ De la misma manera que la actividad uno, el uso de la representación verbal sin terminología técnica. En el ejemplo, el uso de frases como área bajo la gráfica de la función constante como representación de la acumulación del volumen de agua desperdiciado, lleva al estudiante a encontrar equivalencia entre los conceptos de área y de acumulación en un intervalo.
 - ✓ Relación con la segunda parte del objetivo, esto es; comprender que el área bajo la gráfica que resulta al comparar el ritmo de variación del volumen en el tiempo o Caudal con respecto a un intervalo de tiempo transcurrido es precisamente la cantidad de volumen acumulada en desperdicio en ese específico intervalo de tiempo.

- ✓ Se desarrolla también el proceso de razonamiento cuando argumenta con el área en cuestión la predicción del posible volumen desperdiciado en diferentes intervalos de tiempo y el aumento del valor del recibo por servicio de acueducto.
- La idoneidad cognitiva, cuando se favorece la equidad a todos los estilos de aprendizaje, puesto que la conexión entre área y acumulación se construye de forma visual y numérica con operaciones básicas. También, la transferencia de significados del área bajo la gráfica al sustituir Caudal por Velocidad constante de un móvil.
 - Gestión de tensiones. En ningún momento se debe presentar la notación de integral definida $\int_{t_0}^{t_f} f(t)dt$ para calcular el valor del área bajo la gráfica de una función constante, ni se generaliza para funciones con valores cambiantes.

Función cuadrática.

Propósito. Avanzar en la consolidación de la noción de razón de cambio variable, suponiendo que ha tenido experiencias previas -pueden ser de años anteriores- por un lado, del trazo de segmentos tangentes a figuras geométricas curvas, y por otro, de aproximaciones de áreas de polígonos; utilizando herramientas como papel cuadriculado, milimetrado o comandos de Geogebra; además, ha estudiado los atributos fundamentales de la función cuadrática como sus parámetros a , b y c , simetría, vértice, concavidad, como también, el desarrollado de la habilidad para transformar representaciones tabulares a gráficas o diagramas de puntos y viceversa.

Objetivo. Comprender que en el caso de una función cuadrática los cambios locales o instantáneos no son constantes como en la función lineal, por lo tanto, deben estimarse en cada punto; además, que el efecto acumulado de esa tasa

variable requiere métodos de estimación para sumar áreas que ya no son rectángulos en posición horizontal como ocurrió en la función lineal.

Actividades sugeridas.

Tercera actividad. Una cooperativa de crédito premia por medio de una rifa a una muy pequeña fracción de sus clientes con el mejor comportamiento financiero, ofreciéndoles una manera novedosa, y por una única vez, la oportunidad de mejorar sus ingresos haciendo un ahorro hasta por tres años máximo, con base en las siguientes valores:

Tabla 3.

Propuesta de Ahorro con una inversión inicial de \$5'000.000= durante tres años

t (a)	0	1	2	3
V (COP\$)	5'000000	6'666667	11'666667	20'000000

Nota. a es la unidad de tiempo en años y COP\$ es la unidad monetaria en pesos colombianos.
Elaboración propia.

Uno de los padres de familia de los estudiantes del curso, de acuerdo con su historial crediticio en esta cooperativa de crédito, comenta en su casa la situación y presume que puede ser uno de los ganadores del premio, preguntándose por ¿cuál es el ritmo o la tasa a la cual crece la inversión inicial en cada uno de los tres años?

El estudiante comenta con su profesor de matemáticas y él le propone plantear el caso en la clase para sacar provecho de la situación, aprender y dar respuesta a su inquietud.

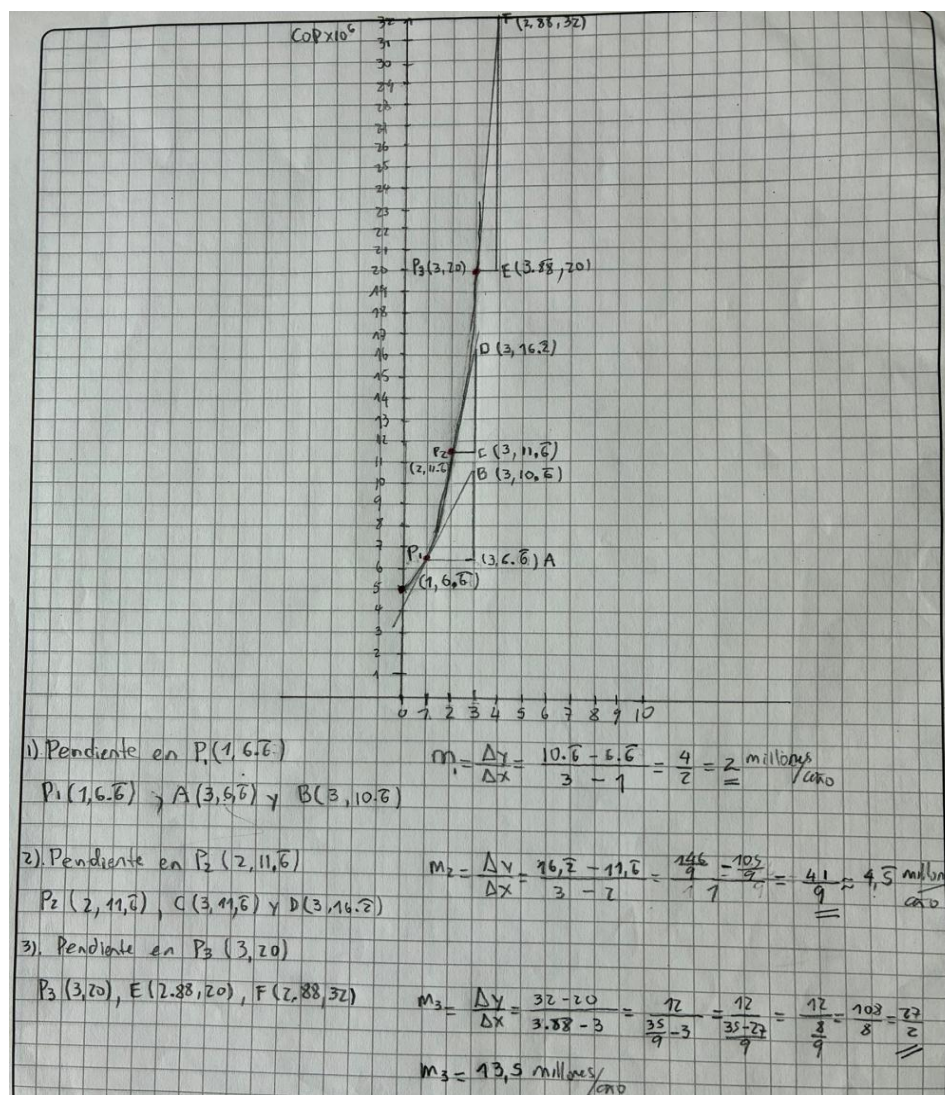
En el salón de clase, después de plantear la situación, el profesor les pide a los estudiantes realizar el siguiente procedimiento:

- En una hoja cuadriculada o milimetrada dibujen, en un plano cartesiano, los puntos correspondientes a los valores de la tabla utilizando un color diferente al del trazo del lápiz, teniendo en cuenta -la escala- que cada línea horizontal corresponde a un año y cada línea vertical a un millón de pesos.
- Dado que el aumento del dinero se considera continuo, es decir, se gana dinero en todo momento durante los tres años, unan los puntos precedentes trazando la gráfica, preferiblemente utilizando un curvígrafo o con la mayor precisión posible.
- Tracen con la mejor precisión posible un segmento tangente a la gráfica anterior en cada uno de los tres puntos.
- Apliquen sus conocimientos adquiridos en el estudio de la función lineal calculando la pendiente de los segmentos tangentes trazados en el paso anterior, la cual equivale a la tasa de crecimiento puntual en cada año y tiene como unidades $MCOP/Año$, Millones de pesos por cada año; dando así solución a la inquietud planteada. Como en el procedimiento para hallar la pendiente deben iniciar con uno de los puntos de la tabla con coordenadas (x_1, y_1) , recuerden estimar las coordenadas de otro punto del segmento (x_2, y_2) , trazar un triángulo rectángulo con las proyecciones y emplear la ecuación 3 que se presenta a continuación.

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (3)$$

- Deben mostrar evidencia de los procedimientos realizados.

Figura 4.
Evidencia del procedimiento: construcción de la gráfica y cálculo de las pendientes



Nota. Uso de papel y lápiz para construir la gráfica y desarrollar el procedimiento real de la propuesta.
Elaboración propia.

- Construir una tabla con los valores obtenidos.

Tabla 4.

Pendientes equivalentes a la tasa a la cual crece la inversión inicial en cada uno de los tres años utilizando lápiz y papel

t (a)	0	1	2	3
m (MCOP\$/año)	0	2	$\frac{41}{9}$	$\frac{27}{2}$

Nota. a es la unidad de tiempo en años y $MCOP\$/año$ es la unidad de la pendiente vinculada con el ritmo en que cambia la inversión anualmente en Millones de pesos colombianos en cada año. Elaboración propia.

- Hacer un refinamiento de las aproximaciones de las pendientes realizadas por todos los estudiantes, con apoyo de herramientas tecnológicas como Geogebra, procediendo de las siguiente manera:

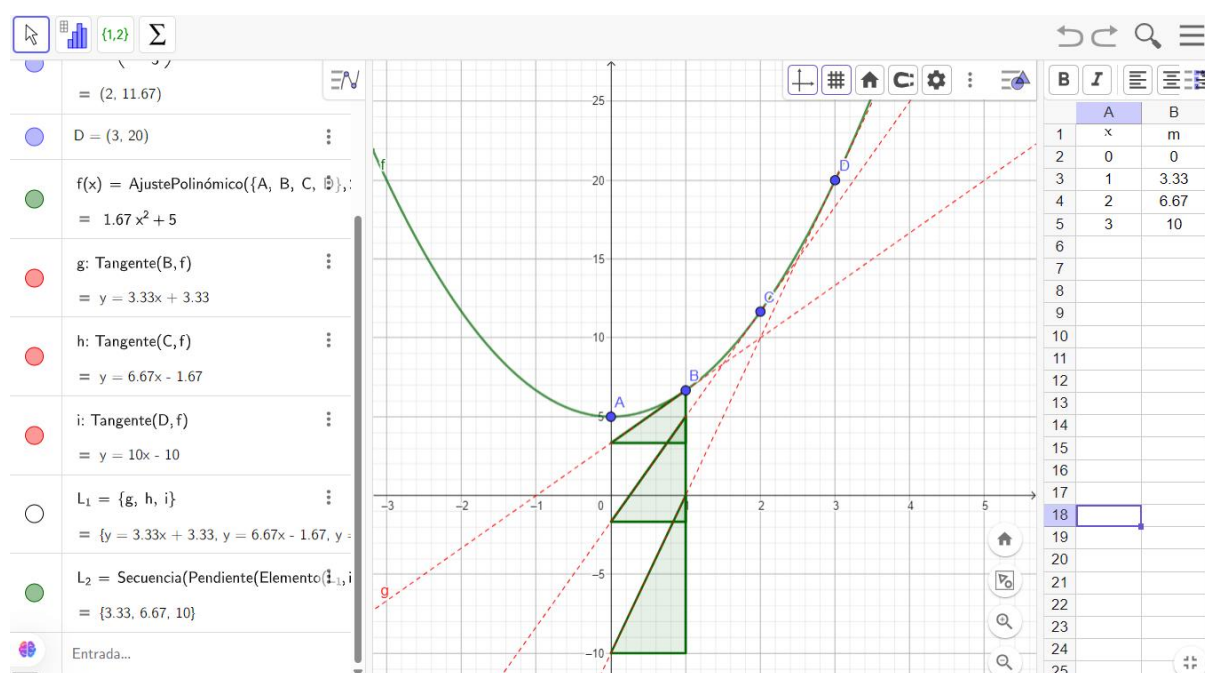
✓ Estando en la ventana de trabajo de Geogebra, digitar en la barra de entrada las coordenadas de los puntos de la tabla tres, utilizando la escala vertical en millones; es decir, $A = (0,5)$, $B = \left(1, \frac{20}{3}\right)$, $C = \left(2, \frac{35}{3}\right)$ y $D = (3,20)$. Los valores de $\frac{20}{3}$ y $\frac{35}{3}$ de millones COP son las expresiones exactas de $6, \hat{6}$ y $11, \hat{6}$ millones COP.

✓ Digitar el comando $f(x) = \text{AjustePolinómico}(\{A, B, C, D\}, 2)$; para unir los puntos A , B , C y D siguiendo la forma de una función polinómica de grado 2 o cuadrática.

✓ Digitar el comando $Tangente(B, f)$; para dibujar y calcular la recta tangente a la función precedente f en el punto B . Hacer lo mismo para obtener las tangentes que pasan por el punto C $Tangente(C, f)$; y por el punto D $Tangente(D, f)$. Acto seguido cambiar las propiedades de las rectas para cambiar su color -por ejemplo rojo- y trazo -por ejemplo línea discontinua-.

✓ Teniendo presente que la pendiente en el punto A es nula, extraer las pendientes de las rectas tangentes a los puntos B , C y D ; digitando los siguientes comandos, $L_1 = \{g, h, i\}$ para juntar las rectas tangentes y $L_2 = \text{Secuencia}(\text{Pendiente}(\text{Elemento}(L_{\{1\}}, i)), i, 1, \text{Longitud}(L_{\{1\}}))$ para obtener sus valores numéricos -una lista de sus pendientes-. Este paso se puede sustituir identificando las pendientes en las ecuaciones que arroja el punto anterior - coeficiente de equis-.

Figura 5.
Construcción de la gráfica y cálculo de las pendientes utilizando Geogebra



Nota. Uso del software Geogebra para construir la gráfica y refinar el cálculo de las pendientes de las rectas tangentes a la curva. Elaboración propia.

✓ Hacer una tabla con las pendientes obtenidas, teniendo en cuenta que sus unidades corresponden a *COP Millones/Año*.

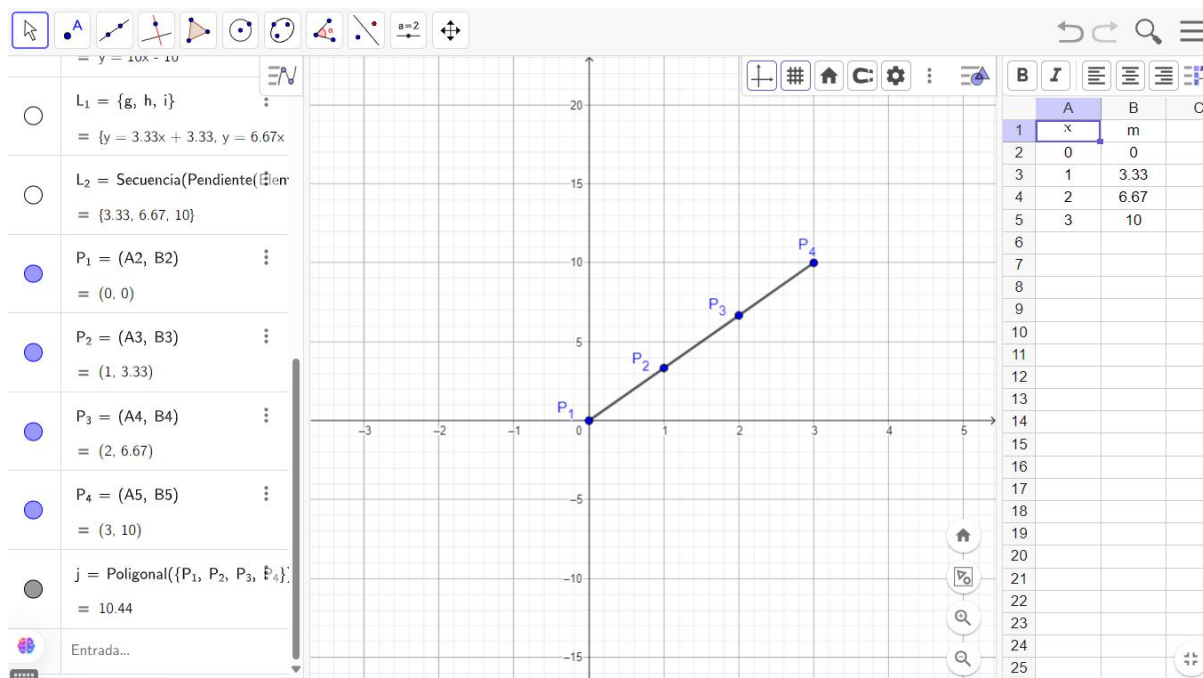
Tabla 5.
Pendientes equivalentes a la tasa a la cual crece la inversión inicial en cada uno de los tres años utilizando Geogebra

$t(a)$	0	1	2	3
m ($MCOP\$ / año$)	0	$\frac{10}{3}$	$\frac{20}{3}$	10

Nota. a es la unidad de tiempo en años y $MCOP\$ / año$ es la unidad del ritmo en que cambia la inversión anualmente en Millones de pesos colombianos en cada año. Elaboración propia.

- Construir un diagrama de puntos con los valores de la Tabla 5 y establecer una conexión con el tipo de gráfica que puede resultar al unir los puntos, teniendo en cuenta que el aumento del ahorro es continuo en la medida que avanza el tiempo.

Figura 6.
Gráfica que relaciona las pendientes instantáneas en el tiempo utilizando Geogebra



Nota. Uso del software Geogebra para construir la gráfica que relaciona el ritmo o tasa de crecimiento de la inversión en el tiempo. Elaboración propia.

Se pueden notar al menos dos resultados:

- ✓ Los ritmos o tasas de crecimiento de la inversión inicial varían con respecto al tiempo y en conjunto generan una nueva función.
- ✓ La función obtenida tiene forma de función lineal, entonces, las variaciones instantáneas en una función cuadrática generan una función lineal.
- Hacer una tabla comparativa de los valores calculados con aproximaciones utilizando lápiz y papel y los valores calculados utilizando Geogebra. ¿Son muy distintos estos valores?

Tabla 6.

Comparación de los valores de las pendientes hallados por los métodos utilizando lápiz y papel, contra uso de Geogebra

t (a)	0	1	2	3
$\begin{matrix} m \\ (\\ MCOP\$ / año \\) \\ \text{Lápiz y Papel} \end{matrix}$	0	2	4, $\hat{5}$	13, $\hat{5}$
$\begin{matrix} m \\ (\\ MCOP\$ / año \\) \\ \text{Geogebra} \end{matrix}$	0	3, $\hat{6}$	6, $\hat{6}$	10

Nota. a es la unidad de tiempo en años y $MCOP\$ / año$ es la unidad del ritmo en que cambia la inversión anualmente en Millones de pesos colombianos en cada año. Comparación de los valores en expresión decimal de las pendientes equivalentes a las tasas de crecimiento de la inversión inicial en cada uno de los tres años, por aproximación a mano alzada contra cálculo por Geogebra. Elaboración propia.

Análisis de la tercera actividad.

- La praxis social o idoneidad ecológica corresponde a la predicción del aumento de ganancias con la opción de ahorro planteada. También, con el desarrollo del pensamiento crítico en búsqueda de posibles riesgos o publicidad engañosa.
- Las herramientas o idoneidad mediacional, hace referencia a las transformaciones tabulares a gráficas, el cálculo de pendientes de las rectas tangentes a una función cuadrática, haciendo uso por un lado, del lápiz y papel; y por otro, del software Geogebra.
- La idoneidad interrelacional, se demuestra:

✓ Al estimular la transferencia del significado de pendiente como tasa de variación instantánea para un tiempo determinado dando así solución a la inquietud planteada.

✓ Al compartir con los integrantes de la clase los cálculos aproximados de las pendientes de las rectas tangentes a la curva y observar las diferencias de éstos con los valores con los calculados por medio de la tecnología digital, en este caso, Geogebra.

- La idoneidad epistémica, en relación con los siguientes elementos:

✓ El uso de la representación verbal sin terminología técnica. En el ejemplo, el uso de frases como la pendiente de la recta tangente a la curva en un valor de tiempo determinado como representación del ritmo o tasa de cambio instantáneo del dinero invertido, lleva al estudiante a encontrar equivalencia entre los conceptos de pendiente de una curva y el cambio instantáneo de esa función en un punto determinado.

✓ Relación con la primera parte del objetivo, esto es; comprender que en el caso de una función cuadrática los cambios locales o instantáneos no son constantes como en la función lineal, por lo tanto, deben estimarse en cada punto.

✓ Se desarrolla también los procesos de modelación y razonamiento cuando establece la conexión visual entre los valores cambiantes de las pendientes con la generación de nueva función que tiene gráfica lineal.

✓ Se favorece la memoria de trabajo por medio del desarrollo de los procedimientos al utilizar las herramientas de papel y lápiz o Geogebra.

- La idoneidad cognitiva, con relación a algunos atributos de la propuesta como:

✓ Poner en acción los conocimientos previos relacionados con el cálculo de pendientes de rectas, el reconocimiento gráfico de funciones cuadráticas conocido

un conjunto de puntos en el plano y la precisión para construir la gráfica que pasa por esos puntos, ya sea a mano alzada o con el uso de un curvógrafo.

✓El favorecimiento de la equidad para los diferentes estilos de aprendizaje, al establecer conexiones entre pendientes de rectas tangentes y variaciones instantáneas construidas de manera visual y numérica utilizando operaciones básicas.

✓La exigencia de la mayor precisión posible cuando se construye la gráfica uniendo los puntos que corresponden a los valores de la propuesta de ahorro en Tabla 3, cuando se dibujan las rectas tangentes a esta gráfica en los puntos de cada año y cuando se miden los cambios Δy y Δx para estimar la pendiente de estas tangentes.

✓La promoción de la evaluación formativa al desarrollar el refinamiento de las aproximaciones de las pendientes por medio de la comparación de sus resultados con los arrojados al utilizar Geogebra.

✓La transferencia de significados de las pendientes de rectas tangentes a la curva cuadrática en algunos de sus puntos, con la asignación de un valor numérico para la variación instantánea de la inversión monetaria inicial en la situación planteada.

✓La generación de una nueva función con los valores de cambio instantáneo, a partir de los valores que arroja el modelo de ahorro planteado.

- Gestión de tensiones. En ningún momento se deben utilizar frases alusivas a la derivada de una función cuadrática, ni presentar la notación de derivada de una función $\frac{df(t)}{dt}$, ni desarrollar derivación simbólica por medio de las reglas para calcular el valor de las variaciones instantáneas en los tiempos determinados, reemplazando en la ecuación de la derivada.

Cuarta actividad. Sabiendo los valores del ritmo al cual crece la inversión inicial de $MCOP\$5$ (Cinco millones de pesos colombianos) en la propuesta de ahorro, se genera una nueva inquietud en la familia del estudiante, que comparte con su maestro; con respecto a ¿cuál es el valor ahorrado en dos años y medio ($2,5a$) después de hacer la inversión inicial?

El profesor da el siguiente grupo de instrucciones para resolverla, no sin antes hacer el siguiente razonamiento: Partiendo de la gráfica que se muestra en la Figura 6, las unidades del eje vertical que corresponden a la variación del valor ahorrado por año son $(MCOP\$/a)$ y las unidades del eje horizontal son las del tiempo transcurrido en años (a), entonces al hacer un producto entre estas dos unidades se tiene $MCOP\$/a \cdot a$, se puede cancelar la unidad de tiempo en años (a), y se simplifica a $MCOP\$$ que es la unidad del valor ahorrado durante el tiempo transcurrido. Esa multiplicación equivale a calcular el área bajo la gráfica de la gráfica en la Figura 6 y por lo dicho anteriormente, es el dinero acumulado desde la inversión hasta algún tiempo antes de los tres años.

- Dibujen la gráfica de la Figura 6.
- Ubiquen en el eje horizontal, el valor de $2,5a$ y proyecten verticalmente ese valor hasta chocar con la gráfica. Aproximen ese valor del eje vertical.
- Como la figura geométrica que se forma es un triángulo y el valor de su área es:

$$A_{\text{Triángulo}} = \frac{(Base) \cdot (Altura)}{2} \quad (4)$$

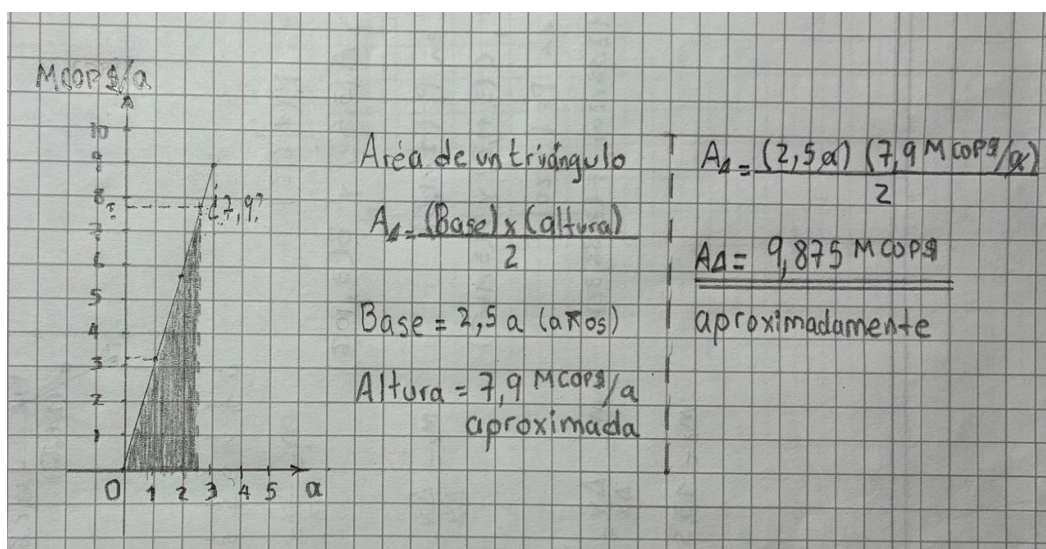
calculen el valore del área teniendo en cuenta que la $Base = 2,5a$ y la $Altura =$ *el valor aproximado en el eje vertical* del paso anterior. El valor de esa área será

el dinero acumulado desde el momento de la inversión inicial hasta los dos años y medio.

- Presenten evidencia de su gráfica y de sus cálculos.

Figura 7.

Evidencia del procedimiento: construcción de la gráfica y cálculo del área bajo la gráfica



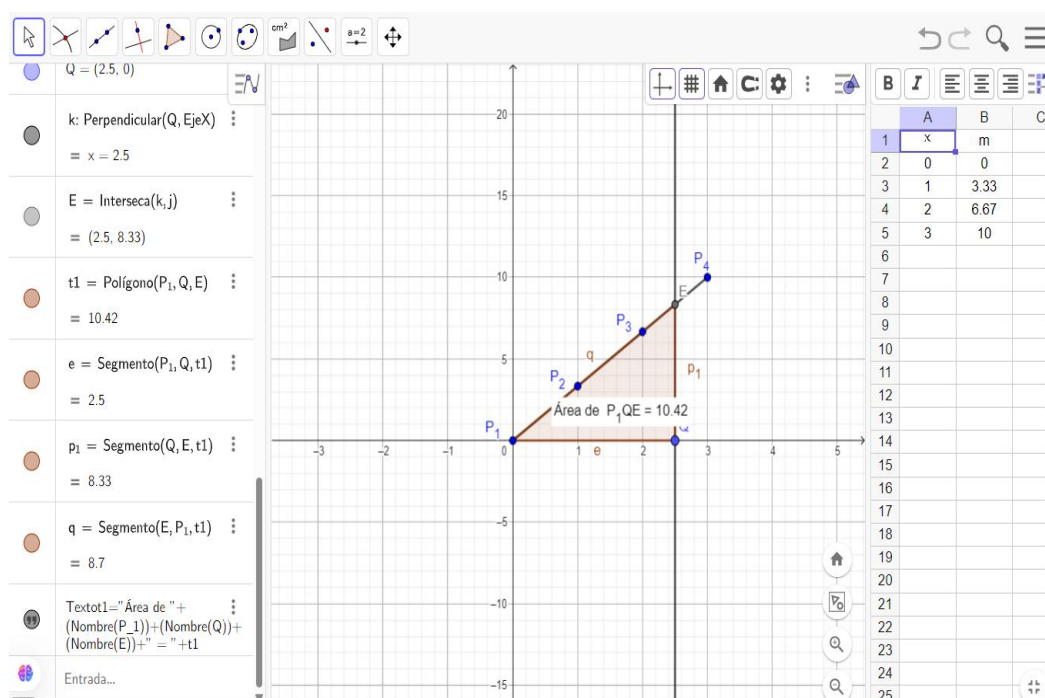
Nota. Uso de lápiz y papel para construir la gráfica que relaciona el ritmo o tasa de crecimiento de la inversión en el tiempo y hacer el cálculo del área bajo la gráfica desde le tiempo inicial hasta 2,5 a.
Elaboración propia.

- Hacer un refinamiento de la aproximación del área bajo la gráfica de la Figura 7 realizada por todos los estudiantes, optando por el uso de herramientas tecnológicas como Geogebra, procediendo de las siguiente manera:
 - ✓ Partiendo del procedimiento de la actividad 3 que originó la gráfica de la Figura 6, en la barra de entrada digite el punto $Q = (2.5,0)$.
 - ✓ Trace una recta perpendicular al eje horizontal que pase por el punto Q .

- ✓ Halle el punto E de intersección entre la gráfica de las pendientes y la recta paralela anterior.
- ✓ Construya el polígono con vértices en los puntos P_1 , Q y E .
- ✓ Calcule el área de ese polígono.

Figura 8.

Construcción del polígono debajo de la gráfica y cálculo de su área utilizando Geogebra



Nota. Uso del software Geogebra para construir la gráfica y refinar el cálculo del área bajo la gráfica de las pendientes. Elaboración propia.

Tabla 7.

Comparación de los valores del área calculada por los métodos utilizando lápiz y papel, contra uso de Geogebra

Magnitudes Calculadas	Método Analógico Lápiz y papel	Método Digital Geogebra
--------------------------	-----------------------------------	----------------------------

Base (Valor de la abscisa)	2,5 a	2,5 a
Altura (Valor de la ordenada)	7,9 $MCOP\$/a$	8,33 $MCOP\$/a$
Área (Cantidad ahorrada)	9,875 $MCOP\%$	10,42 $MCOP\%$

Nota. a es la unidad de tiempo en años y $MCOP\$/año$ es la unidad del ritmo en que cambia la inversión anualmente en Millones de pesos colombianos en cada año. 8,33 $MCOP\$/a$ corresponde a la ordenada del punto E en la Figura 8. Comparación de los valores en expresión decimal de las áreas calculadas por los métodos de Papel y Lápiz, o Geogebra equivalentes al ahorro o cantidad de dinero acumulado hasta los dos primeros años y medio. Elaboración propia.

Análisis de la cuarta actividad.

- La praxis social o idoneidad ecológica corresponde al cálculo del dinero ahorrado o acumulado en un intervalo de tiempo determinado. También, con el desarrollo del pensamiento crítico para advertir si las ganancias calculadas resultan beneficiosas a satisfacción del inversor.
- Las herramientas o idoneidad mediacional se observan en los ejercicios de transformación de algunas representaciones como tabular a gráfica y viceversa, el cálculo de áreas bajo la gráfica de una función lineal por métodos analógicos y digitales.
- La idoneidad interrelacional, se demuestra:
 - ✓ Al estimular la transferencia del significado de área bajo la gráfica de una función lineal como el efecto de acumular fracciones de una cantidad inicial, concerniente a la duda que motiva el aprendizaje del procedimiento en cuestión.
 - ✓ Al compartir con los integrantes de la clase los cálculos aproximados de las áreas bajo la gráfica de la función lineal y percatarse de las diferencias de éstos con los valores con los calculados en Geogebra.
- La idoneidad epistémica, en relación con los siguientes elementos:

- ✓ El uso de la representación verbal sin terminología especial, esto es; el uso de términos como ahorro o cantidad de dinero acumulado representados en el valor de las áreas bajo la gráfica de una función lineal en un intervalo de tiempo determinado, ofreciendo una manera de comprender los efectos acumulados semejantes a las áreas bajo las gráficas en intervalos de su dominio.
- ✓ Relación con la segunda parte del objetivo, esto es; el efecto acumulado a un ritmo variable -en este caso lineal- requiere métodos de estimación de áreas de polígonos que se forman debajo de la gráfica que pueden ser triángulos rectángulos o trapecios rectángulos.
- ✓ Se priorizan los razonamientos cualitativos sobre los algebraicos, por ejemplo; en la introducción al procedimiento que propone el docente para resolver la pregunta orientadora.
- ✓ Se fortalecen los procesos de modelación cuando se construyen vínculos visuales entre los valores del dinero ahorrado y del extremo superior del intervalo de acumulación, siempre y cuando el extremo inferior de este intervalo sea el punto de referencia inicial de la inversión primaria -tiempo de la inversión inicial-.
- ✓ Al igual que la actividad tres, se favorece la memoria de trabajo por medio del desarrollo de los procedimientos al utilizar las herramientas de papel y lápiz o Geogebra.
- La idoneidad cognitiva, con relación a algunos atributos de la propuesta como:
 - ✓ Aprovechar lo aprendido en años o experiencias anteriores sobre la estimación de áreas de polígonos, el reconocimiento de funciones lineales cuando se conoce un conjunto de sus puntos en el plano y la precisión para construir la gráfica que pasa por esos puntos, ya sea a mano alzada o con el uso de una regla.

- ✓El favorecimiento de la equidad para los diferentes estilos de aprendizaje, al establecer conexiones entre áreas bajo la gráfica de una función lineal y la acumulación de cantidades en un intervalo de su dominio, elaboradas de manera visual y numérica con el uso de operaciones básicas.
- ✓El requerimiento de realizar con la mayor precisión posible la aproximación del área bajo la gráfica que se obtiene con los valores de la variación de la cantidad del dinero invertido en algunos tiempos específicos como los relacionados en la Tabla 5, en donde es necesario estimar la altura del triángulo equivalente a la ordenada del punto que tiene como abscisa el extremo superior del intervalo de acumulación.
- ✓El fomento de la evaluación formativa por medio del refinamiento de las aproximaciones de las áreas de los triángulos formados bajo las gráficas de la función lineal, al comparar los resultados arrojados por los métodos análogo y digital.
- ✓La generación de una nueva función que relaciona los valores de efecto acumulado con los extremos superiores del intervalo de acumulación.
- Gestión de tensiones. En ningún momento se deben utilizar frases alusivas a la integral de una función lineal, ni presentar la notación de integral definida de una función en un intervalo cerrado $[t_1, t_2]$, $\int_{t_1}^{t_2} f(t)dt$, ni desarrollar antiderivación simbólica por medio de las reglas usuales para binomios lineales aplicando la definición de la integral definida.

Conclusiones o reflexiones finales:

Aprovechar los objetivos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en los grados 8° y 9° referentes al inicio del estudio de las funciones con variable real que

parte desde las funciones lineales y cuadráticas -y otras más-; para hacer una introducción temprana de las nociones de cambio instantáneo o local y de efectos acumulados en un intervalo de su dominio, es probablemente viable y puede tener un potencial didáctico de gran importancia; si se analiza y orienta desde un conjunto de criterios de idoneidad didáctica coherente con los marcos curriculares actuales, y se depura con la experiencia entusiasta al impulsar el desarrollo de iniciativas de esta naturaleza.

El análisis presentado en este artículo desde la idoneidad didáctica que proponen cinco de las seis fases del Enfoque Ontosemiótico, enriquecida con los propósitos de la teoría Socioepistemológica ligados a la construcción y comprensión del conocimiento matemático vinculado a las prácticas sociales, históricas y culturales y, apoyada en el principio de ZDP de la teoría Sociocultural como andamiaje para potenciar el aprendizaje y la interpretación coherente de los DBA para los grados 8° y 9°; aplicado a una propuesta que busca profundizar en la mirada dinámica de algunas funciones básicas, desde un punto de vista que le da prelación al significado de los elementos variacionales en cuestión desde lo geométrico y numérico por encima de lo analítico, ha mostrado indicios de poseer un valor educativo que se puede capitalizar, tanto en el desarrollo general del Pensamiento Variacional, como en el futuro estudio de los elementos del cálculo.

Se ha mostrado una propuesta que rescata los conocimientos y habilidades previas de años y experiencias anteriores de los estudiantes, referentes a las nociones de pendiente de una recta, área, procedimientos intuitivos de asociación visual, manipulación y refinamiento de aproximaciones geométricas y numéricas, precisión en las construcciones utilizando lápiz y papel o la aplicación de códigos de programación en un software como Geogebra para representar estas ideas en ambientes digitales; todo esto, con el fin de asociar nociones de cambio instantáneo y efectos acumulados como atributos de las funciones lineales y cuadráticas, que a su vez tienen características propias -constantes, variables, áreas de rectángulos o de triángulos rectángulos- y generan nuevas relaciones -futuros operadores- con los dominios respectivos.

En esta propuesta, también se ha hecho mención de las posibles tensiones que pueden emerger en el salón de clase con relación al uso de la representación verbal de las nociones en cuestión, es decir; las recomendaciones de emplear frases o términos familiares o analogías que ayuden a madurar de manera adecuada el avance progresivo de estos conceptos complejos, evitando completamente el uso de las representaciones analíticas que presuponen nociones más avanzadas como la completitud de los números reales, el paso al límite y técnicas de cálculo. Otra tensión desde la fase de idoneidad mediacional en las cuatro actividades propuestas concierne

a la consideración de generar una carga adicional a los compromisos establecidos en el plan de estudios o malla curricular, reduciendo el tiempo para su óptimo desarrollo.

En el despliegue del artículo se configuró un conjunto de cuatro actividades, que parecieran ajustarse razonablemente a una interpretación de los criterios de idoneidad didáctica del Enfoque Ontosemiótico, las cuales están dispuestas a la discusión de la comunidad de interés para refinarse y motivar la generación de mejores versiones de actividades o propuestas que viabilicen el objetivo propuesto y sean temática de futuros artículos o derrotero de creatividad en la planeación de proyectos en el aula.

Finalmente, se presentan dos apreciaciones específicas de elementos desarrollados en la propuesta:

- En la Tercera actividad, se puede utilizar Excel en cambio de Geogebra para extraer de los datos de la Tabla 4 la ecuación de la recta y con ella, la identificación de las pendientes.
- En esta misma actividad, si se desea se pueden aprovechar los valores comparativos de la Tabla 6 para aplicar algunos conceptos estadísticos como el cálculo del error de medición.

Referencias

- Báez, M., y Farfán, R. (2022). Sistematización y análisis de un proceso de reflexión sobre la matemática escolar: aspectos para la profesionalización docente. Relime. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 25(1), 35-62. <https://doi.org/10.12802/relime.22.2512>.
- Boyer, C. B. (1999). Historia de la matemática (M. Martínez Pérez, Trad.). Alianza Editorial. (Obra original publicada en 1968).
- Cabañas, G y Cantoral, R. (2007). La integral definida: un enfoque socioepistemológico. En C. Dolores Editor (Ed.), *Matemática Educativa. Algunos aspectos de la Socioepistemología y la visualización en el Aula*. (pp. 3-25). Ediciones Díaz de Santos. ISBN: 84-7978-786-4.
- Díaz-Godino, J. (2024). Enfoque ontosemiótico en educación matemática. Fundamentos, herramientas y aplicaciones. McGraw-Hill - Aula Magna - España. <https://hdl.handle.net/10481/93596>.
- Díaz, M. (2007). Visualización y generalizaciones: el caso de la determinación de lugares geométricos. En C. Dolores Editor (Ed.), *Matemática Educativa. Algunos aspectos de la Socioepistemología y la visualización en el Aula*. (pp. 207-229). Ediciones Díaz de Santos. ISBN: 84-7978-786-4.
- Espinosa Romero, C. I. (2015). Construcción social del concepto de derivada en un punto desde la óptica socioepistemológica. En II Encuentro Internacional de Matemáticas, Estadística y Educación Matemática. <https://repositorio.uptc.edu.co/server/api/core/bitstreams/58e0b3f5-2e02-4801-b903-57f135d1aec3/content>.

- Gutiérrez, O., Pérez, T., & Rojas, A. (2006). Zona de desarrollo próximo digital: para el aprendizaje significativo de las ciencias naturales. Revista EDUCARE - UPEL-IPB - Segunda Nueva Etapa 2.0, 10(2). <https://revistas.investigacion-upelipb.com/index.php/educare/article/view/304>.
- Ministerio de Educación Nacional de Colombia. [MEN]. (2016). Derechos Básicos de Aprendizaje DBA v.2. Matemáticas.
https://www.colombiaaprende.edu.co/sites/default/files/files_public/2022-06/DBA_Matematicas-min.pdf.
- Morales, A., Mena, A., & Mena, J. (2024). Habilidades del siglo XXI y Socioepistemología. Homenaje a Ricardo Cantoral. Bolema: Boletim de Educação Matemática, 38, 1-24. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v38a230081>.
- Ortiz, O. (2013). La integral definida en la noción de efecto acumulado. Una mirada para la formación en los primeros semestres de la Universidad. Tesis de Maestría, Universidad Nacional de Colombia UNAL- Colombia.
<https://bffrepositorio.unal.edu.co/server/api/core/bitstreams/6d7f088e-2d0f-4bd4-a90e-9955e06be2fb/content>.
- Vygotsky, L. (1956). Pensamiento y Lenguaje. Obras Escogidas Tomo II. Unifal MG – Brazil. https://www.unifal-mg.edu.br/humanizacao/wp-content/uploads/sites/14/2017/04/Vygotsky_Obras_escogidas_TOMO_2.pdf.