

Enseñanza y aprendizaje de la trigonometría: Un abordaje desde las investigaciones doctorales en educación matemática

Teaching and learning trigonometry: An approach from doctoral research in mathematics education

Ensinar e aprender trigonometria: Uma abordagem a partir da pesquisa de doutorado em educação matemática

La trigonométrie dans la recherche: Doctorale internationale en didactique des mathématiques

 **Fernando Tercero Vitola de la Rosa**
Fernando.vitola@unitecnar.edu.co



Fundación Universitaria Antonio de Arévalo, Cartagena-Colombia

Recibido: 06 de noviembre 2022 / Aprobado: 09 de marzo 2023 / Publicado: 30 de abril 2023

RESUMEN

La trigonometría es un área fundamental de la matemática con muchas dificultades en los procesos de aprendizaje y enseñanza. Este artículo describe el estado actual de las investigaciones doctorales recientes sobre didáctica de la trigonometría, analizando los vacíos existentes e identificando posibles temas de investigación. Se realizó una revisión sistemática de 18 tesis doctorales relacionadas con los descriptores trigonometría y funciones trigonométricas, obtenidas mediante buscadores académicos y repositorios de diferentes universidades existentes en internet, utilizando como categorías de análisis los objetos matemáticos abordados, la enseñanza, el aprendizaje, el currículo de matemática y el contenido de trigonometría. El análisis realizado evidenció que existen deficiencias conceptuales, pedagógicas y tecnológicas en los docentes, al igual que problemas de comprensión de los alumnos cuando estudian la trigonometría. Se concluye que hay pocas investigaciones relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje de las funciones trigonométricas, lo cual constituye una gran oportunidad para futuras investigaciones doctorales.

Palabras clave: Educación matemática; Trigonometría; Funciones trigonométricas; Tesis doctorales

ABSTRACT

Trigonometry is a fundamental area of mathematics with many difficulties in the learning and teaching processes. This article describes the current state of recent doctoral research on the didactics of trigonometry, analyzing the existing gaps and identifying possible research topics. A systematic review of 18 doctoral theses related to the descriptors trigonometry and trigonometric functions, obtained through academic search engines and repositories of different universities existing on the Internet, was carried out, using as categories of analysis the mathematical objects addressed, teaching, learning, the curriculum of mathematics and trigonometry content. The analysis carried out showed that there are conceptual, pedagogical and technological deficiencies in teachers, as well as comprehension problems of students when they study trigonometry. It is concluded that there is little research related to the teaching and learning of trigonometric functions, which constitutes a great opportunity for future doctoral research.

Key words: *Mathematics education; Trigonometry; Trigonometric functions; Doctoral theses*

RESUMO

A trigonometria é uma área fundamental da matemática com muitas dificuldades nos processos de aprendizagem e ensino. Este artigo descreve o estado atual da pesquisa de doutorado recente sobre a didática da trigonometria, analisando as lacunas existentes e identificando possíveis tópicos de pesquisa. Foi realizada uma revisão sistemática de 18 teses de doutorado relacionadas aos descritores trigonometria e funções trigonométricas, obtidas por meio de buscadores acadêmicos e repositórios de diferentes universidades existentes na Internet, utilizando como categorias de análise os objetos matemáticos abordados, ensino, aprendizagem, o currículo de conteúdo de matemática e trigonometria. A análise realizada mostrou que existem deficiências conceituais, pedagógicas e tecnológicas dos professores, bem como problemas de compreensão dos alunos quando estudam trigonometria. Conclui-se que há poucas pesquisas relacionadas ao ensino e aprendizagem de funções trigonométricas, o que constitui uma grande oportunidade para futuras pesquisas de doutorado.

Palavras-chaves: *Educação matemática; Trigonometria; Funções trigonométricas; Teses de doutorado*

RÉSUMÉ

La trigonométrie est un domaine fondamental des mathématiques avec de nombreuses difficultés dans les processus d'apprentissage et d'enseignement. Cet article décrit l'état actuel des recherches doctorales récentes sur la didactique de la trigonométrie, en analysant les lacunes existantes et en identifiant des sujets de recherche possibles. Une

revue systématique de 18 thèses de doctorat liées aux descripteurs trigonométrie et fonctions trigonométriques, obtenues par le biais de moteurs de recherche académiques et de référentiels de différentes universités existant sur Internet, a été réalisée, en utilisant comme catégories d'analyse les objets mathématiques abordés, l'enseignement, l'apprentissage, la programme de contenu de mathématiques et de trigonométrie. L'analyse effectuée a montré qu'il existe des lacunes conceptuelles, pédagogiques et technologiques chez les enseignants, ainsi que des problèmes de compréhension des élèves lorsqu'ils étudient la trigonométrie. Il est conclu qu'il existe peu de recherches liées à l'enseignement et à l'apprentissage des fonctions trigonométriques, ce qui constitue une grande opportunité pour de futures recherches doctorales.

Mots-clés: Enseignement des mathématiques; Trigonométrie; Fonctions trigonométriques; Thèses de doctorat

INTRODUCCIÓN

En las últimas décadas ha tomado fuerza a nivel mundial una disciplina conocida como educación matemática o didáctica de las matemáticas. Cabe resaltar, que la primera denominación se utiliza en los países anglosajones, mientras que la segunda se emplea en países como España, Francia y Alemania. El objeto de estudio de la educación matemática es el análisis de las problemáticas educativas relacionadas con las matemáticas, las cuales son investigadas a la luz de diferentes enfoques y teorías propios de esta disciplina y con los aportes de algunas ciencias auxiliares como la matemática, la filosofía, la psicología, la sociología, entre otras (Godino, 2010).

En consecuencia del desarrollo de la educación matemática como disciplina científica, se ha incrementado el número de programas académicos de maestría y doctorado a nivel internacional en esta área del conocimiento (Castro y Gómez, 2020), y por consiguiente, también se evidencia un aumento en el número de publicaciones e investigaciones de educación matemática de alto nivel, entre la cuales se destacan las tesis doctorales, que representan uno de los principales requisitos para obtener el título de doctor en educación matemática o denominaciones académicas afines.

Según Tolentino Sifuentes (2019), una de las principales problemáticas que afrontan los estudiantes de doctorado es la selección del tema de su tesis doctoral, ya que éste debe estar de acuerdo con el interés investigativo del doctorando, debe ser

pertinente, realizable y permitir aportes novedosos en el campo de conocimiento abordado. Un primer paso para la selección del tema de la tesis en los doctorados de educación matemática consiste en la realización de una revisión sistemática de la literatura existente en el área de la educación matemática en la cual se desea trabajar, especialmente de las tesis doctorales que se hayan desarrollado en dicha área de conocimiento en los últimos años, tal como se propone en este artículo para el caso particular de la trigonometría.

De acuerdo con Mendoza (2020), la trigonometría tiene como objeto de estudio las relaciones entre los lados y los ángulos de los triángulos, así como las funciones asociadas a los ángulos, conocidas en la literatura especializada como funciones trigonométricas. Esta rama de las matemáticas, según afirman Arhin y Hokor (2021), constituye una parte esencial del currículo de matemáticas en la educación secundaria en la mayoría de los países a nivel mundial, debido a que articula el álgebra, la geometría y el razonamiento gráfico, al mismo tiempo que es un prerrequisito para el cálculo y otras disciplinas como la física.

En el caso particular de Colombia, esto se evidencia en los estándares básicos de competencias para el área de matemáticas definidos por el Ministerio de Educación Nacional de Colombia (2006), para los grados décimo y undécimo de educación secundaria, los cuales indican que el estudiante de este nivel de formación debe estar en capacidad de describir y modelar fenómenos periódicos en un contexto real a partir de las relaciones y de las funciones trigonométricas. En el mismo sentido, el Ministerio de Educación Nacional de Colombia (2016), define los derechos básicos de aprendizaje correspondientes al grado décimo de educación secundaria, los cuales establecen que el estudiante en este grado debe comprender y utilizar funciones para construir modelos matemáticos de fenómenos periódicos, resolver problemas y justificar sus soluciones.

Por otra parte, es necesario resaltar que la trigonometría es fundamental para el aprendizaje en otros campos de las matemáticas, tales como el álgebra lineal, el cálculo diferencial, el cálculo integral y las ecuaciones diferenciales, a la vez que favorece el desarrollo de la creatividad, el pensamiento crítico, la argumentación y la solución de problemas en los estudiantes. De igual manera, la trigonometría es una herramienta

primordial para el estudio de otras disciplinas como las ingenierías y la arquitectura, en las cuales se emplean modelos matemáticos que utilizan las funciones trigonométricas para explicar, predecir o modificar el comportamiento de algunas variables presentes en fenómenos reales (Weber, 2005).

La clase de trigonometría se convierte entonces en un escenario propicio para investigaciones de carácter práctico en educación matemática. Estas investigaciones, según lo explica Castro de Bustamante (2007), son las más próximas a la labor que realiza el docente en el aula de clases y están relacionadas con el currículo, la planeación de las actividades académicas, el diseño, implementación y evaluación de estrategias de enseñanza y de aprendizaje, la utilización de recursos y los procesos de evaluación.

De acuerdo con Gur (2009), la matemática se caracteriza por ser una de las asignaturas que causan más rechazo por parte de los estudiantes, muchos de los cuales presentan un bajo rendimiento académico en esta área de formación. En particular, el autor afirma que la trigonometría resulta más compleja y abstracta para los estudiantes que otros contenidos de las matemáticas, dando lugar a concepciones equivocadas, errores matemáticos y obstáculos en el aprendizaje, los cuales deben ser abordados desde la investigación en educación matemática.

Montiel (2006), identifica varios contextos para el abordaje de la trigonometría, los cuales se van desarrollando de manera secuencial a lo largo del currículo de matemáticas en los diferentes niveles de formación. En primer lugar, se trabajan las razones trigonométricas en un triángulo rectángulo, para posteriormente abordar la trigonometría del círculo unitario, la cual permite realizar la transición hacia las funciones trigonométricas y sus representaciones gráficas. La multiplicidad de representaciones de los objetos matemáticos involucrados en la trigonometría, al igual que la transición entre los diferentes contextos trigonométricos, contribuye con las dificultades que se presentan en el aprendizaje y en la enseñanza de esta unidad temática, que son objeto de estudio de la educación matemática.

En síntesis, dada la relevancia de la trigonometría como objeto de estudio en educación matemática, es pertinente realizar una revisión de las investigaciones que se

han desarrollado a nivel internacional recientemente. Como antecedente de este tipo de trabajo, se destaca la revisión bibliográfica realizada por Scholz y Montiel (2017), en la cual se analizan investigaciones relacionadas con las dificultades que se presentan en la enseñanza y el aprendizaje de la trigonometría en el bachillerato, utilizando como fuente los artículos científicos publicados en revistas reconocidas en educación matemática.

Por su parte, Romero y Farfán (2016), realizan una revisión del estado actual de las investigaciones en el tema específico de las series trigonométricas de Fourier en el contexto de la educación superior, en la cual se tuvieron en cuenta trabajos finales de maestría, tesis doctorales y artículos publicados en revistas científicas. Este trabajo evidencia la importancia de las funciones trigonométricas en el estudio de temas complejos como el análisis armónico y el procesamiento digital de señales, los cuales conforman el fundamento teórico para muchos de los avances tecnológicos existentes en la actualidad.

De acuerdo con los planteamientos anteriores, se definió como objetivo de este artículo, realizar una descripción del estado de las investigaciones doctorales en educación matemática a nivel internacional en el campo de estudio de la trigonometría en los últimos 17 años, analizando las posibles tendencias, los vacíos que se presentan en esta temática e identificando temas para futuras investigaciones que pudieran ser abordadas como tesis para optar al título de Doctor en Educación Matemática. Se espera que este documento pueda servir a los estudiantes e investigadores en educación matemática como punto de partida para nuevos trabajos relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de la trigonometría en los diferentes niveles educativos.

MÉTODO

En el presente artículo se llevó a cabo una investigación de tipo documental consistente en la revisión sistemática de las investigaciones desarrolladas en los últimos años en educación matemática, en el campo de estudio de la trigonometría y en el ámbito internacional. La búsqueda de estas investigaciones se realizó a través de internet, utilizando diferentes buscadores reconocidos de trabajos académicos tales como Google

académico, ResearchGate, ERIC, TDX, TESEO, DIALNET y repositorios de distintas universidades existentes en la web, usando como descriptores para la búsqueda las palabras clave “trigonometría”, “funciones trigonométricas”, “educación matemática” y “tesis doctorales” en diferentes idiomas.

Como criterio de selección para las investigaciones se decidió trabajar únicamente con tesis o disertaciones doctorales, excluyendo otro tipo de documentos como los trabajos de grado de maestría y de especialización o artículos científicos. En cuanto al idioma, se realizaron búsquedas de investigaciones en español, inglés, francés, catalán y portugués. Vale la pena destacar que en el caso de investigaciones en portugués no se encontró ninguna investigación a nivel doctoral relacionada con la trigonometría. Se descartaron algunas investigaciones en otros idiomas como el alemán, debido a la dificultad para traducirlas y comprenderlas.

La ventana de tiempo utilizada inicialmente fue de 2018 a 2022, sin embargo, dado que el número de tesis doctorales encontradas en esta temática en este período de tiempo es bastante bajo, se decidió ampliar la ventana de tiempo y se tuvieron en cuenta trabajos entre 2005 y 2022. Si bien es cierto que algunos de estos trabajos no son tan recientes, se tomó la decisión de incluirlos por considerarlos buenos antecedentes de investigación doctoral de la trigonometría.

Como resultado de la búsqueda realizada se obtuvieron 18 tesis doctorales. Inicialmente se realizó una caracterización de dichos trabajos de acuerdo con diferentes categorías, tales como el país y la institución de origen, el idioma en que fueron escritos, para posteriormente analizarlos utilizando como criterios de comparación los propósitos de las investigaciones, los objetos matemáticos estudiados, la enseñanza, el aprendizaje y el contenido de la unidad temática referido a la trigonometría en los diferentes niveles educativos.

De las 18 tesis doctorales revisadas, 11 están escritas en inglés, 3 en español, 2 en francés y 2 en catalán. Como se puede observar, el inglés es el idioma en que están escritas la mayoría de estas investigaciones. De acuerdo con el país donde se encuentra la universidad en la cual se presentó la tesis, se hallaron 5 en Estados Unidos, 4 en

España, 2 en Francia, 2 en Sudáfrica, 1 en Inglaterra, 1 en México, 1 en Perú, 1 en Australia y 1 en Irlanda. En la mayoría de los casos, las investigaciones fueron desarrolladas en el mismo país donde se encuentra ubicada la universidad, aunque una de las tesis españolas fue realizada en Colombia y las tesis francesas trabajaron con poblaciones en Francia, Vietnam y Camboya.

Las universidades donde se desarrollaron las investigaciones revisadas fueron: Universidad de New Hampshire (Estados Unidos), Universidad del Estado de Illinois (Estados Unidos), Universidad de Franklin (Estados Unidos), Universidad de Texas (Estados Unidos), Universidad Autónoma de Barcelona (España), Universidad de Valencia (España), Universidad de Granada (España), Universidad de París (Francia), Universidad de Grenoble (Francia), Universidad de Sudáfrica (Sudáfrica), Universidad de Kwazulu – Natal (Sudáfrica), Universidad de Warwick (Inglaterra), Instituto Politécnico Nacional (México), Universidad Nacional Superior de San Marcos (Perú), Universidad de Limerick (Irlanda) y Universidad de Western Sidney (Australia).

De acuerdo con la categorización realizada, es evidente que la trigonometría representa un contenido de interés para la educación matemática en el ámbito internacional, lo cual se refleja en las investigaciones doctorales realizadas en diferentes países ubicados en los cinco continentes, escritas en diferentes idiomas, que involucran a universidades reconocidas internacionalmente con sus líneas y grupos de investigación.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Objetos matemáticos investigados en las tesis doctorales sobre trigonometría

Con respecto a los objetos matemáticos abordados en la investigación doctoral, aunque todas las tesis están relacionadas con la trigonometría, en cada investigación se hace énfasis en uno o más objetos matemáticos específicos, los cuales son analizados desde diferentes puntos de vista de acuerdo con el interés investigativo de los autores y de sus posturas epistemológicas con respecto a la educación matemática.

A continuación, se analizan los objetos matemáticos trabajados por cada uno de los autores revisados: Las investigaciones realizadas por Chaar (2015), Costa (2015), McMillian Jenkins (2022), Vilches (2007) y Walsh (2015) centran su estudio en los conceptos básicos de trigonometría que se trabajan en la educación secundaria, abordando objetos matemáticos como ángulos, sistemas de medidas angulares, semejanza de triángulos, razones trigonométricas, solución de triángulos, identidades y ecuaciones trigonométricas, teorema de Pitágoras, componentes de un vector, ángulos notables, ángulos de referencia, ángulos de elevación y ángulos de depresión.

Por su parte Fiallo (2010) trabaja también el concepto de razones trigonométricas, pero orientándolo hacia los procesos de demostración y argumentación, que según su criterio son fundamentales para la enseñanza y el aprendizaje de la trigonometría. Paradójicamente, en los lineamientos curriculares emanados del Ministerio de Educación Nacional de Colombia (1998), no se hace énfasis en los diferentes métodos de demostración que eran estudiados tradicionalmente en la educación secundaria colombiana antes de la publicación de estos lineamientos.

Otros estudios, trabajan con objetos matemáticos derivados de los diferentes contextos en que se aplica la trigonometría. Los trabajos de Chin (2013), McMillian Jenkins (2022), Loeng (2019) abordan el contexto de la trigonometría del triángulo, de igual forma, en las investigaciones realizadas por Chaar (2015), Chin (2013), McMillian Jenkins (2022), Loeng (2019) y Ssebagala (2018) se hace referencia al contexto de la trigonometría del círculo, en tanto que Chin (2013) trabaja el contexto de la trigonometría analítica. La trigonometría del triángulo hace referencia a triángulos rectángulos cuyos ángulos son mayores que 0° y menores que 90° . La trigonometría del círculo se refiere a ángulos de cualquier magnitud y signo, así como a las propiedades trigonométricas representadas en forma gráfica. La trigonometría analítica aborda la representación de las funciones trigonométricas en series de potencia y el uso de los números complejos para relacionar las funciones trigonométricas y exponenciales. Montiel (2006), destaca que estos contextos de la trigonometría se trabajan de manera independiente y aislada del contexto en la enseñanza tradicional.

Las funciones trigonométricas han sido uno de los objetos matemáticos con más presencia en las tesis doctorales revisadas, en este sentido, Chaar (2015), Loeng (2019) y Martín Fernández (2021) estudian la comprensión de las funciones seno y coseno. Hertel (2013) analiza las funciones trigonométricas con respecto a sus aplicaciones prácticas en las diferentes disciplinas, al igual que Montiel (2005), quien estudia las funciones trigonométricas de manera general, haciendo énfasis en las prácticas sociales que requieren de la aplicación de este tipo de funciones, y Nguyen (2011) quien aborda las funciones periódicas y el concepto de periodicidad, particularmente en las funciones trigonométricas y sus aplicaciones en la modelización de fenómenos físicos. Ortiz Galarza (2017), Ssebagala (2018), Tatira (2020) y Zeng (2019) se interesan más por las diferentes representaciones de las funciones trigonométricas, incluyendo sus gráficas y características.

El trabajo de Guerola (2018), más que un objeto matemático en particular, se dedica a analizar los conceptos y problemas trigonométricos que aparecen en las obras antiguas atribuidas a Ptolomeo y Clavius desde una perspectiva histórica. Estas investigaciones de tipo histórico pueden ser útiles para contextualizar la enseñanza de la trigonometría y, en algunos casos, servir como referentes para la organización del currículo en los diferentes niveles educativos.

En cuanto a los objetos matemáticos y en particular aquellos que se utilizan en la trigonometría, se observan diferentes posiciones, por ejemplo, Romero y Farfán (2016) consideran que para poder comprender conceptos complejos como las series trigonométricas de Fourier que se estudian en la educación superior, es necesario que las funciones trigonométricas seno y coseno estén constituidas como objetos en las estructuras mentales de los estudiantes, de manera que puedan ser manipuladas a través de diferentes representaciones gráficas y numéricas. Weber (2006) por su parte, utiliza el término precepto, acuñado por Gray y Tall, que indica que los conceptos de la trigonometría constituyen una triada proceso – objeto – símbolo, de tal forma que los procesos utilizados en las prácticas sociales generan los objetos matemáticos y los símbolos que los representan.

En los casos de Hertel (2013) y Montiel (2005) los objetos matemáticos son concebidos como una creación del hombre y adquieren sentido en la medida que se asocian a prácticas sociales que dan solución a los problemas del contexto en un período de tiempo específico, a la vez que contribuyen al desarrollo de otras disciplinas diferentes a las matemáticas, permitiendo la construcción de modelos que pueden ser utilizados eficazmente para comprender, explicar y transformar la realidad.

Propósito de las investigaciones doctorales en educación matemática

Teniendo en cuenta el propósito de las investigaciones y las teorías de la educación matemática empleadas por el investigador en su tesis doctoral, se encuentra que el tema de la trigonometría ha sido analizado desde diferentes enfoques. Algunas de las tesis analizan el aprendizaje de la trigonometría, otras se orientan al análisis de la enseñanza de los temas de trigonometría por parte de los docentes y aquellas que se centran en el análisis del currículo en los diferentes niveles de la educación. De igual manera, vale la pena destacar que en las investigaciones se evidencia la utilización de diferentes teorías de la educación matemática para analizar los procesos de enseñanza, aprendizaje y evaluación en estudiantes, docentes en formación, docentes en ejercicio o incluso en los textos escolares.

Investigaciones doctorales orientadas hacia la enseñanza de la trigonometría

Chaar (2015) utiliza como sujetos de estudio a docentes en ejercicio y docentes en formación, describiendo las fortalezas y debilidades que presentan en cuanto a los conocimientos de trigonometría, a la vez que analiza el impacto que tienen estos conocimientos en la forma en que el docente retroalimenta el trabajo y el pensamiento matemático del estudiante, todo esto en el marco de fundamentación de la observación profesional (professional noticing) y en las teorías del aprendizaje situado, asumiendo que la enseñanza y el aprendizaje no pueden ser apartados del contexto.

Chin (2013) por su parte, analiza la enseñanza en la educación superior a la luz de las teorías del pensamiento matemático basadas en la percepción, la operación y el razonamiento propuestas por autores como Piaget, Bruner, Skemp, Dienes, Tall, Van

Hiele, entre otros. Este investigador a través de entrevistas y mapas conceptuales contruidos por los docentes, demuestra que los docentes de educación superior tienen concepciones erróneas sobre algunos conceptos de trigonometría y presentan dificultades para enlazar los diferentes contextos de la trigonometría, correspondientes a la trigonometría del triángulo, trigonometría del círculo y trigonometría analítica.

Por su parte, Hertel (2013) hace referencia a los profesores a nivel de educación secundaria y educación superior, contrastando la concepción de la enseñanza de la trigonometría como la evolución histórica de los conceptos trigonométricos y la concepción moderna de la trigonometría como herramienta que puede ser aplicada en el desarrollo científico. A partir de este análisis, el autor teoriza sobre la forma en que los docentes deben abordar la trigonometría para su aplicación en otras disciplinas diferentes a las matemáticas, contribuyendo así con el desarrollo de la ciencia.

McMillian Jenkins (2022) analiza el impacto de la utilización de los computadores y las herramientas tecnológicas en la enseñanza de la trigonometría en la educación secundaria, concluyendo que las herramientas tecnológicas son un factor fundamental para la motivación del estudiante hacia el estudio de estos temas. En el mismo sentido, Lupahla (2020) evidencia con su investigación el impacto positivo que tiene la implementación de una enseñanza de las funciones periódicas en la educación secundaria basada en modelos implementados en Excel, en el desarrollo del conocimiento tecnológico y pedagógico de los docentes.

Otro autor que hace referencia a la utilización de la tecnología en la enseñanza de la trigonometría es Weber (2006), quien con su trabajo demostró las ventajas que representa el uso de los computadores para la exploración de las relaciones geométricas y numéricas entre los diferentes conceptos de la trigonometría, privilegiando así la comprensión sobre el aprendizaje memorístico y mecánico que se observa en la formación tradicional. Este autor recomienda que la enseñanza haga énfasis en lo conceptual, en las múltiples representaciones y relaciones existentes entre los conceptos trigonométricos, en el modelamiento matemático y en la solución de problemas.

Martín Fernández (2021) analiza la comprensión y los significados de las funciones seno y coseno en los docentes en formación utilizando cuestionarios semánticos desde el enfoque ontosemiótico de la educación matemática. De manera similar, Ortiz Galarza (2017) en su investigación se interesa por la comprensión de las funciones trigonométricas, diseñando una secuencia de actividades que permiten al estudiante la construcción de diferentes representaciones mentales de este objeto matemático.

Para el caso de la investigación doctoral realizada por Ssebaggala (2018) se evidencia el trabajo con profesores de educación secundaria en formación, centrando el interés en la forma en que estos docentes razonan cuando aprenden trigonometría. El análisis se realiza a la luz de las teorías del razonamiento y de la argumentación, aportando una secuencia didáctica basada en las líneas trigonométricas, la cual le permitió realizar una caracterización de los tipos de razonamiento utilizados por estos profesores. Dicha caracterización puede tener importantes implicaciones en cuanto al mejoramiento de la enseñanza de las funciones trigonométricas.

Tatira (2020) también se dedica a trabajar con profesores en formación, pero se interesa en indagar sobre los conocimientos en el área de trigonometría que poseen estos docentes para la enseñanza en la educación superior. Se emplean teorías relacionadas con el conocimiento matemático para la enseñanza. Este autor evidencia las debilidades que presentan los docentes en formación en los contenidos de la trigonometría y en los conocimientos pedagógicos. El autor reflexiona sobre las implicaciones de estas debilidades en la enseñanza de la trigonometría en las instituciones sudafricanas.

Vilches (2007) orienta su trabajo hacia la enseñanza en la educación secundaria utilizando teorías relacionadas con la enseñanza personalizada. Este autor diseña e implementa un módulo didáctico para la enseñanza de la trigonometría en quinto grado de secundaria de manera personalizada. La aplicación de este módulo evidenció mejoras sustanciales en el rendimiento académico de los estudiantes con respecto al grupo de control que recibió la formación de la manera tradicional.

El trabajo de Walsh (2015) es otro ejemplo de investigación orientada a la enseñanza de la trigonometría en la educación secundaria. Este autor aplica un modelo

de enseñanza en docentes que se encuentran en formación para enseñar en educación secundaria. Su investigación doctoral se fundamenta en el modelo de Van Hiele y hace uso de la teoría APOS y el concepto de descomposición genética propuestos por Dubinsky. Realiza una adaptación del modelo de Van Hiele que ha sido ampliamente utilizado para describir la forma en que las personas aprenden la geometría, para aplicarlo al campo de la trigonometría. El modelo de enseñanza implementado evidencia mejoras en la comprensión de los conceptos trigonométricos por parte de los estudiantes y puede ser útil en el mejoramiento de la enseñanza de la trigonometría en la secundaria.

Finalmente, en este mismo esquema de formación, Zeng (2019) se dedica a analizar el acompañamiento tutorial realizado por el docente, fundamentando su investigación en las teorías relacionadas con el aprendizaje basado en modelos. Los aportes de esta investigación se refieren a la construcción de un modelo de enseñanza a partir del acompañamiento tutorial de estudiantes, los cuales trabajan individualmente con el tutor en actividades que los orientan en la construcción de modelos y esquemas mentales que permiten la comprensión de los conceptos trigonométricos y la solución de problemas.

Godino (2010), destaca la importancia del desarrollo profesoral, así como la necesidad de generar investigaciones consistentes en la observación sistemática de clases y en la organización didáctica de las actividades en el aula. Por otro lado, Gur (2009), manifiesta la importancia de los errores del estudiante en la clase de matemáticas y considera que la labor del profesor es observar al estudiante para identificar y corregir sus errores, los cuales deben utilizarse como insumo para tomar decisiones didácticas y diseñar actividades de aprendizaje.

Investigaciones doctorales orientadas hacia el aprendizaje de la trigonometría

Costa (2015) hace énfasis en el aprendizaje de los estudiantes que cursan la educación secundaria obligatoria en España, para lo cual centra su análisis en las teorías sobre dificultades, errores y obstáculos de aprendizaje tomadas de los trabajos de Popper, Bachelard, Rusell, Lakatos y Rico. En el mismo sentido, Gur (2009) considera que el origen de los errores del estudiante está en las concepciones erróneas y en los obstáculos que se presentan en las lecciones de trigonometría, entre los cuales se

encuentran el mal uso de los datos, la mala interpretación del lenguaje, inferencias lógicas inválidas, definiciones distorsionadas y errores técnicos mecánicos.

Por su parte, Fiallo (2010) estructura su tesis doctoral en torno a los procesos de aprendizaje de los estudiantes de décimo grado de educación secundaria en Colombia basándose en las teorías histórico - epistemológicas de la demostración y de la argumentación. También hace referencia a teorías de las representaciones mentales y en particular al modelo de Van Hiele. Este autor desarrolla una propuesta de enseñanza de las razones trigonométricas en la cual se privilegia el aprendizaje de los conceptos, el desarrollo de habilidades para la demostración y la argumentación, la utilización de entornos de geometría dinámica como herramienta de apoyo y basada en el modelo de Van Hiele y la utilización de los mapas conceptuales.

McMillian Jenkins (2022) describe el impacto de la utilización de enseñanza asistida por computador en el aprendizaje y las percepciones de los estudiantes con respecto a la trigonometría, fundamentando su estudio de acuerdo con las teorías de representación, visualización e instrucción asistida por computador. El autor concluye que, para los temas de ángulos de referencia y componentes de un vector, la utilización de enseñanza asistida por computador no evidencia grandes diferencias de aprendizaje en los estudiantes con respecto a la enseñanza tradicional, sin embargo, sí impacta positivamente en las percepciones del estudiante sobre la trigonometría y en su motivación para el estudio.

Por otro lado, Loeng (2019) enfoca su investigación hacia los procesos de aprendizaje en estudiantes de secundaria de Francia y de Camboya. Esta investigación sigue un enfoque antropológico de la educación matemática basado en las teorías de Chavellard relacionadas con los significados personales e institucionales, la praxeología y la transposición didáctica. También se hace uso de la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau. En esta investigación se diseñan cuestionarios que permiten observar las debilidades que presentan los estudiantes en trigonometría, para posteriormente proponer secuencias didácticas para introducir a los estudiantes de ambos países en la comprensión de las funciones seno y coseno.

En el mismo sentido, Lupahla (2020) en su investigación, aborda los procesos de aprendizaje de funciones periódicas en educación secundaria. El trabajo se fundamenta en el aprendizaje basado en la indagación y en las teorías relacionadas con las representaciones mentales y la visualización. El autor resalta las ventajas que esto representa en el proceso de aprendizaje de los estudiantes en el tema de las funciones trigonométricas y sus características.

Por su parte, Martín Fernández (2021) trabaja la comprensión y el significado de las funciones seno y coseno mediante la aplicación de cuestionarios semánticos a los estudiantes. El análisis se basa en las teorías sobre conceptos, significados y sentido del enfoque ontosemiótico de la educación matemática. Los estándares básicos de competencia publicados por el Ministerio de Educación Nacional de Colombia (2006) también consideran la comprensión como parte esencial para el desarrollo de las competencias en matemáticas, entendiendo la comprensión no sólo como los contenidos y sus redes conceptuales, sino también su aplicación en diferentes contextos. En este documento también se hace referencia a la división del conocimiento matemático en conocimiento conceptual y conocimiento procedimental, los cuales se complementan y permiten el desarrollo de las competencias matemáticas.

Desde los estándares básicos de competencias para el área de matemáticas en Colombia se recomienda “para un mejor aprendizaje de los estudiantes” iniciar con situaciones de aprendizaje significativo mediadas en un entorno sociocultural, utilizando estrategias que fomenten la participación activa del estudiante, a la vez que se promueven las actitudes de aprecio, seguridad y confianza hacia las matemáticas. Se identifican como componentes del conocimiento matemático los pensamientos numérico, variacional, geométrico y aleatorio.

Nguyen (2011) en su investigación, trabaja con una población de estudiantes de secundaria en los procesos de enseñanza de la periodicidad, para lo cual toma como base la teoría de la ingeniería didáctica de Artigue, así como algunos elementos relacionados con la praxeología tomados de Chevallard. La investigación se enfoca hacia el concepto de periodicidad en los fenómenos físicos correspondientes al movimiento circular uniforme y a las oscilaciones armónicas y propone mediante la ingeniería

didáctica una forma de trabajar la modelización de estos fenómenos físicos en un ambiente de geometría dinámica para los estudiantes de secundaria.

La investigación realizada por Ortiz Galarza (2017) se centra en el estudio de las múltiples representaciones mentales de las funciones trigonométricas en los estudiantes de secundaria, siguiendo un enfoque cognitivo basado en las teorías de las representaciones mentales de los objetos matemáticos. La autora concluye que estas representaciones tienen un impacto positivo en la comprensión de las funciones trigonométricas y sus aplicaciones en la modelización de situaciones y en la solución de problemas.

Zeng (2019) se dedica a analizar los procesos matemáticos y la comprensión de los conceptos trigonométricos por parte de los estudiantes de secundaria durante el acompañamiento tutorial realizado por el docente. La investigación se fundamenta en las teorías relacionadas con el aprendizaje basado en modelos. Este autor realiza una caracterización de las principales dificultades encontradas en los estudiantes en el aprendizaje de la trigonometría y da orientaciones sobre la forma de realizar el acompañamiento tutorial.

Investigaciones doctorales orientadas hacia el currículo de trigonometría

Loeng (2019) realiza un análisis comparativo entre los currículos de trigonometría en Francia y Camboya. De manera similar, Nguyen (2011) compara los currículos de Francia y Vietnam sobre trigonometría. Se verifica que las temáticas abordadas en la educación secundaria en estos países son bastante parecidas, de tal manera que dichos autores proponen actividades con el propósito de superar las debilidades encontradas en el aprendizaje de la trigonometría en estos países.

El trabajo de Montiel (2005) se dedica a analizar el currículo y la enseñanza de la trigonometría en los diferentes niveles de formación a partir de la teoría socioepistemológica propuesta por Cantoral. En esta tesis doctoral se desarrolla la construcción social de la función trigonométrica, lo cual presenta una forma novedosa de abordar la enseñanza de la función trigonométrica en el aula de clases y por ende abre

un campo de investigación importante en la implementación de prácticas sociales que permitan una mejor comprensión de la función trigonométrica en diferentes contextos.

En relación con los recursos instruccionales, Hertel (2013) realiza un análisis desde los textos escolares, haciendo énfasis en las diferentes aplicaciones de la trigonometría en disciplinas diferentes a las matemáticas para el avance científico. El análisis de los textos escolares abre camino a muchas investigaciones en educación matemática, ya que constituyen el insumo principal de los docentes para elaborar sus explicaciones y para el diseño de las actividades de aprendizaje y evaluación.

La investigación desarrollada por Guerola (2018) es diferente a las demás investigaciones revisadas, ya que plantea un análisis histórico de la trigonometría a partir de los conceptos trigonométricos existentes en textos antiguos. En esta tesis no se evidencia la utilización de teorías específicas de la educación matemática debido al carácter histórico de la investigación. Este análisis histórico puede contribuir a la organización del currículo de trigonometría en diferentes niveles de formación.

Análisis de la información recolectada

Con base en la información recopilada en las secciones anteriores, se puede evidenciar que el número de investigaciones a nivel de tesis doctorales en educación matemática, relacionadas con la trigonometría es bastante reducido, sin embargo, se observa que hay interés de la comunidad de investigadores en educación matemática a nivel internacional por estudiar las problemáticas de la enseñanza, el aprendizaje y la evaluación de la trigonometría, lo cual se evidencia en la variedad de temas tratados en las 18 tesis doctorales revisadas, que comprenden temáticas desde las más simples hasta las de mayor complejidad en los diferentes niveles de formación.

Aunque en el presente documento solo se revisaron tesis doctorales, en la literatura científica se encuentra gran variedad de publicaciones como trabajos de grado de maestrías y especializaciones, así como artículos científicos sobre temas referentes a la enseñanza, el aprendizaje y la evaluación de la trigonometría, mostrando que este campo

de la educación matemática presenta diversidad de problemáticas que ameritan ser investigadas en la actualidad.

Otro aspecto importante es el propósito que se persigue en cada una de las investigaciones. Se encontraron investigaciones centradas en los docentes en formación, en los docentes en ejercicio, en los estudiantes, en los textos escolares y en el currículo. Adicionalmente, los trabajos se orientan hacia diferentes aspectos de la trigonometría, entre los cuales se destacan la comprensión de los conceptos trigonométricos, las representaciones mentales de los conceptos trigonométricos, el diseño de modelos de enseñanza de la trigonometría, la modelización de fenómenos a partir de las funciones trigonométricas, la evaluación y retroalimentación del trabajo de los estudiantes de trigonometría, las concepciones de estudiantes y docentes sobre los objetos matemáticos de la trigonometría, los contenidos de trigonometría en los diferentes niveles de educación, la utilización de herramientas tecnológicas en la enseñanza y aprendizaje de la trigonometría, la aplicación de la trigonometría en otras disciplinas científicas, el conocimiento matemático y pedagógico necesario para la enseñanza de la trigonometría y la caracterización de dificultades, obstáculos de aprendizaje y errores en el aprendizaje de la trigonometría.

En cuanto a los objetos matemáticos abordados en las investigaciones también se observa una gran diferenciación. En las investigaciones se presentan tres contextos para el estudio de la trigonometría, los cuales son la trigonometría del triángulo, la trigonometría del círculo y la trigonometría analítica. Cada uno de estos contextos incluye diferentes objetos matemáticos y representaciones, lo cual dificulta la comprensión del estudiante al realizar la transición de un contexto a otro a medida que avanza en el desarrollo del currículo.

Por otra parte, las investigaciones son abordadas desde diferentes enfoques epistemológicos y desde distintas teorías específicas de la educación matemática. Lo anterior abre un abanico de opciones para los investigadores, quienes pueden enmarcar su trabajo desde cualquiera de las teorías existentes en la educación matemática, combinar aspectos relevantes de las diferentes teorías y enfoques existentes o incluso

animarse a proponer nuevas teorías que permitan innovar en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la educación matemática.

De acuerdo con los aportes de las diferentes investigaciones revisadas, es claro que existen limitaciones tanto en el conocimiento matemático como en el conocimiento pedagógico por parte de los docentes en formación y de los docentes en ejercicio, lo cual puede representar un obstáculo en el aprendizaje de los estudiantes que están a cargo de estos docentes.

De igual forma, dada la complejidad que representan los temas de trigonometría para los estudiantes debido a la cantidad de objetos matemáticos que se utilizan en la trigonometría, sus propiedades y las relaciones existentes entre ellos, es común que surjan dificultades y obstáculos en el aprendizaje. Es necesario entonces, abordar nuevas investigaciones con el propósito de caracterizar estas situaciones y diseñar modelos de enseñanza que permitan superar estas falencias, ya que la trigonometría es fundamental para el estudio de temas más avanzados de las matemáticas como es el caso del cálculo diferencial, el cálculo integral, las ecuaciones diferenciales, el cálculo vectorial, entre otros. También vale la pena destacar que la trigonometría es una herramienta necesaria en otras disciplinas como es el caso de la física, de tal manera que las deficiencias conceptuales en trigonometría pueden impactar en la comprensión de los conceptos físicos y en la resolución de problemas específicos de esta ciencia.

Como se expresó anteriormente, son muchas las problemáticas existentes en educación matemática en el campo de estudio de la trigonometría, a la vez que son pocas las investigaciones doctorales referentes a esta temática. Además, las investigaciones realizadas dejan algunos vacíos que se convierten en oportunidades para desarrollar investigaciones a nivel de tesis doctorales.

Una de las temáticas más importantes de la trigonometría y que ha sido poco abordada en las investigaciones doctorales es el tema de las funciones trigonométricas. Entre las investigaciones revisadas se observa que la mayoría de las que tratan este tema hacen énfasis en las funciones seno y coseno, esto debido a que son las más utilizadas en la modelización de fenómenos físicos. Existen muy pocos trabajos

enfocados hacia las demás funciones trigonométricas (tangente, secante, cosecante y cotangente) o hacia las funciones trigonométricas inversas.

Para la comprensión de las funciones trigonométricas existen múltiples representaciones que permiten la visualización e interpretación de sus características y transformaciones, lo cual abre un sinnúmero de posibilidades de investigación relacionadas con estrategias que desarrollen la construcción de estas representaciones mentales tanto en los estudiantes como en los docentes. Otra posibilidad puede ser el análisis de las dificultades, obstáculos o errores en el proceso de aprendizaje de las funciones trigonométricas por parte de los estudiantes. Este análisis puede servir también como insumo para el desarrollo de modelos de enseñanza de las funciones trigonométricas o como organizadores para el diseño curricular.

Muy pocas de las investigaciones revisadas realizan un análisis crítico de los textos escolares. Podría pensarse entonces en investigar la forma en que los textos escolares colombianos desarrollan la unidad temática de las funciones trigonométricas a la luz de los lineamientos curriculares, estándares, competencias y derechos básicos de aprendizaje. En el mismo sentido, podría realizarse un análisis del material audiovisual o los videotutoriales sobre funciones trigonométricas existentes en la web y que son cada vez más utilizados por los estudiantes como complemento del material de estudio que se trabaja institucionalmente.

Finalmente, se puede trabajar en la modelización de fenómenos a partir de las funciones trigonométricas, trabajo que puede ser enriquecido mediante la utilización de software de simulación o entornos de geometría dinámica que hagan más eficiente la enseñanza y el aprendizaje.

CONCLUSIÓN

De acuerdo con el objetivo planteado al inicio del artículo, se logró describir de manera general el estado de las investigaciones doctorales relacionadas con la didáctica de la trigonometría que fueron desarrolladas en los últimos 17 años a nivel internacional, identificando las principales tendencias y necesidades investigativas en este campo del

saber, lo cual constituye un valioso aporte para los investigadores de la educación matemática, quienes podrán utilizar esta información como punto de partida para nuevas investigaciones doctorales relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje de la trigonometría en los diferentes niveles educativos.

El análisis realizado evidencia la importancia de la trigonometría dentro del currículo de matemáticas en los distintos niveles de formación, ya que permite la articulación de diferentes contenidos de la matemática y es fundamental para el estudio de otras disciplinas. Paradójicamente, se observó que el número de tesis doctorales en este campo del saber es bastante reducido, pero como aspectos positivos vale la pena destacar que se encontraron investigaciones desarrolladas en universidades reconocidas de diferentes países y con gran variedad en cuanto a los objetos matemáticos abordados, a las posturas epistemológicas que orientan las investigaciones y a los propósitos investigativos, los cuales incluyen la enseñanza, el aprendizaje y el diseño curricular, entre otros aspectos.

Con respecto a las posibles tendencias de las investigaciones doctorales relacionadas con la trigonometría se destaca en primer lugar el estudio de las dificultades en el aprendizaje de esta unidad temática que afrontan los estudiantes. Estas problemáticas tienen entre sus principales causas la complejidad de los objetos matemáticos estudiados por la trigonometría, la necesidad de conocimientos previos de otros contenidos de la matemática como el álgebra y la geometría, la diversidad de representaciones existentes para las funciones trigonométricas y la necesidad de trabajar en diferentes contextos como la trigonometría de triángulos rectángulos, la trigonometría del círculo unitario y la trigonometría analítica.

En relación con el aprendizaje de la trigonometría, es necesario indagar sobre las dificultades, los obstáculos de aprendizaje y los errores de los estudiantes en la asignatura de trigonometría. En ese orden de ideas, un área de investigación interesante son las diferentes representaciones mentales que utiliza el estudiante para comprender los conceptos trigonométricos y las relaciones existentes entre estos. Además, debe prestarse especial atención a la transición entre los diferentes contextos de la trigonometría por parte de los estudiantes, quienes generalmente comienzan estudiando

las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo, para luego pasar a estudiar las funciones trigonométricas en el círculo unitario y finalmente estudiar las gráficas de las funciones trigonométricas y las series trigonométricas.

Una segunda tendencia son las investigaciones relacionadas con los problemas en la enseñanza de la trigonometría. En este sentido, Las investigaciones revisadas muestran grandes debilidades en los docentes, lo cual amerita que nuevas investigaciones doctorales tomen como sujetos de estudio a los docentes en ejercicio y a los docentes en formación, analizando sus habilidades para comprender los conceptos de la trigonometría y realizar el proceso de transposición didáctica que permita la apropiación de estos por parte de los estudiantes. También pueden resultar interesantes las investigaciones sobre los modelos de enseñanza utilizados por los docentes en el área de la trigonometría, incluyendo el uso de las nuevas tecnologías como las calculadoras, los programas de geometría dinámica y las aplicaciones para realizar gráficas de funciones.

Otro campo de investigación que debe ser abordado a nivel de investigaciones doctorales es la unidad temática de trigonometría, tanto a nivel de educación secundaria como a nivel de educación superior, realizando comparación de los contenidos estudiados en los diferentes países, de tal manera que se pueda proponer un programa sólido de trigonometría que brinde al estudiante los fundamentos que necesita para seguir avanzando en el área de matemáticas y en otras disciplinas. De igual forma, es necesario revisar el abordaje que hacen los textos escolares de los temas de la trigonometría, teniendo en cuenta las estrategias narrativas utilizadas para explicar los temas, los ejemplos, ejercicios y problemas que proponen y la forma en que se relacionan los contenidos con el contexto.

Entre los objetos matemáticos que se trabajan en la trigonometría, uno de los que más llama la atención de los investigadores son las funciones trigonométricas, dado que estas permiten la construcción de modelos aplicables en diferentes disciplinas para la comprensión de distintos fenómenos. La mayoría de las investigaciones relacionadas con funciones trigonométricas se han orientado hacia la comprensión de las funciones seno y coseno, quedando un vacío en el estudio de las demás funciones trigonométricas y de

las funciones trigonométricas inversas, así como de las series trigonométricas que se trabajan generalmente en la educación superior.

Se debe tener en cuenta que este artículo se ha limitado al análisis de tesis doctorales, pero vale la pena resaltar que a nivel de trabajos de grado de maestría y de artículos publicados en revistas indexadas reconocidas a nivel internacional se encuentra una gran cantidad de publicaciones relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje de la trigonometría, lo cual demuestra que la didáctica de la trigonometría es un tema de mucha actualidad y que despierta el interés de los investigadores en educación matemática.

CONFLICTO DE INTERESES

El autor declara que no existen conflictos de intereses para la publicación del presente artículo científico.

REFERENCIAS

- Arhin, J., y Hokor, E. (2021). Analysis of High School Students' Errors in Solving Trigonometry Problems. *Journal of Mathematics and Science Teacher*, 1(1). <https://n9.cl/vkulp>
- Castro de Bustamante, J. (2007). La investigación en educación matemática: una hipótesis de trabajo. *Revista Educere*, 11(38), 519-531. <https://n9.cl/5ymt6>
- Castro, P., y Gómez, P. (2020). Educación Matemática en los países de habla hispana: agremiaciones, eventos y publicaciones. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 16(60), 245-259. <https://n9.cl/0knry>
- Chaar, M. (2015). *Secondary pre-service, in-service, and student teachers' noticing of mathematical work and thinking in trigonometry*. Tesis doctoral, Universidad de New Hampshire. <https://scholars.unh.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=3215&context=dissertation>
- Chin, K. E. (2013). *Making sense of mathematics: Supportive and problematic conceptions with special reference to trigonometry*. [Tesis doctoral, Universidad de Warwick]. http://wrap.warwick.ac.uk/58403/1/WRAP_THESIS_Chin_2013.pdf
- Costa, M. A. (2015). *L'aprenentatge de la trigonometria a l'ensenyament obligatori i al batxillerat*. [Tesis doctoral, Universidad Autónoma de Barcelona]. <http://hdl.handle.net/10803/322793>
- Fiallo, J. E. (2010). *Estudio del proceso de demostración en el aprendizaje de las funciones trigonométricas en un ambiente de geometría dinámica*. [Tesis doctoral, Universidad de Valencia]. <https://n9.cl/bh85n>
- Godino, J. (2010). *Perspectiva de la didáctica de las matemáticas como disciplina*

- tecnocientífica. Universidad de Granada. <https://n9.cl/kaqnt>
- Guerola Olivares, J. (2018). *El colegio romano i els orígens de la trigonometria: de l'analemma de Ptolomeu a la gnomónica de Clavius*. [Tesis doctoral, Universidad Autónoma de Barcelona]. <http://hdl.handle.net/10803/663986>
- Gur, H. (2009). Trigonometry Learning. *New Horizons in Education*, 57(1), 67-80. <https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ860819.pdf>
- Hertel, J. (2013). *Investigating the purpose of trigonometry in modern sciences*. [Tesis doctoral, Universidad del estado de Illinois]. <https://www.proquest.com/docview/1436986362>
- Loeng, R. (2019). *Les fonctions sinus et cosinus dans le secondaire en France et au Cambodge*. [Tesis doctoral, Universidad de París]. <https://theses.hal.science/tel-02983421v1>
- Lupahla, N. (2020). *The influence of excel modelling professional development on conceptual understanding of periodicity of trigonometric functions*. [Tesis doctoral, Universidad de Sudáfrica]. <https://uir.unisa.ac.za/handle/10500/27918>
- Martín Fernández, E. (2021). *Meanings shown by students and teachers in training on the sine and the cosine of an angle*. [Tesis doctoral, Universidad de Granada]. <http://hdl.handle.net/10481/68166>
- McMillian Jenkins, R. (2022). *Impact of interactive computer-aided instruction in learning trigonometry in a high school precalculus course*. [Tesis doctoral, Universidad de Franklin]. <https://n9.cl/kxlp7>
- Ministerio de Educación Nacional (1998). Serie lineamientos curriculares de matemáticas. https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-89869_archivo_pdf9.pdf
- Ministerio de Educación Nacional de Colombia (2006). Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. Bogotá: Imprenta Nacional de Colombia. <https://n9.cl/z2xjz>
- Ministerio de Educación Nacional de Colombia (2016). Derechos Básicos de Aprendizaje. Bogotá: Panamericana Formas e Impresos S.A. <https://n9.cl/86sq4>
- Mendoza, J. A. (2020). Análisis Conceptual y de Instrucción de las Razones y Funciones Trigonométricas Visión desde las Civilizaciones Antiguas. *Revista DIALÓGICA*, 16(2), 49-87. <https://n9.cl/j4378>
- Montiel, G. (2005). *Estudio socioepistemológico de la función trigonométrica*. [Tesis doctoral, Instituto Politécnico Nacional]. <https://n9.cl/7j6ti>
- Montiel, G. (2006). Construcción social de la función trigonométrica. En Martínez, Gustavo (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 818-823). México DF, México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C. <https://core.ac.uk/download/pdf/33252351.pdf>
- Nguyen, N. (2011). *La périodicité dans les enseignements scientifiques en France et au Vietnam: une ingénierie didactique d'introduction aux fonctions périodiques par la modélisation*. [Tesis doctoral, Universidad de Grenoble]. <https://www.archives-ouvertes.fr/tel-00630048v1>
- Ortiz Galarza, M. (2017). *The influence of multiple representations on secondary students' understanding of trigonometric functions*. [Tesis doctoral, Universidad de Texas]. https://scholarworks.utep.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1516&context=open_etd
- Romero, F., y Farfán, R. M. (2016). Estado actual de la investigación alrededor de la serie trigonométrica de Fourier. *Investigación e Innovación en Matemática Educativa*, 1,

279-286. <https://n9.cl/eu7rr>

Scholz, O., y Montiel, G. (2017). Revisión bibliográfica de la investigación didáctica en trigonometría. *Investigación e Innovación en Matemática Educativa*, 2, 225-233. <https://n9.cl/nd7qx>

Ssebagala, L. (2018). *Investigating pre-service secondary mathematics teachers' reasoning when learning trigonometry using the line segment approach*. [Tesis doctoral, Universidad del estado de Illinois]. <https://n9.cl/oxyt6>

Tatira, B. (2020). *An exploration of pre-service teachers' mathematics knowledge for teaching in trigonometry at a higher education institution*. [Tesis doctoral, Universidad de Kwazulu - Natal]. <https://n9.cl/bm3l2>

Tolentino Sifuentes, L. A. (2019). *Factores personales e institucionales asociados a la dificultad para elaborar la tesis en el Programa de Doctorado de la Facultad de Educación de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos–2017*. [Tesis doctoral, Universidad Nacional Mayor de San Marcos]. <https://n9.cl/kpgdp>

Vilches, J. (2007). *Modelo de enseñanza modular personalizada de las funciones trigonométricas en el quinto grado de educación secundaria*. [Tesis doctoral, Universidad Nacional Mayor de San Marcos]. <https://n9.cl/3j5b9>

Walsh, R. (2015). *A purpose-built model for the effective teaching of trigonometry: a transformation of the van Hiel model*. [Tesis doctoral, Universidad de Limerick]. <https://n9.cl/p7k47>

Weber, K. (2005). Students' understanding of trigonometric functions. *Mathematics Education Research Journal*, 17(3), 91-112. <https://n9.cl/en2kr>

Zeng, X. M. (2019). *An analysis of mathematical process and understanding in a tutoring intervention: the case of trigonometry*. [Tesis doctoral, Universidad de Western Sidney]. <https://researchdirect.westernsydney.edu.au/islandora/object/uws%3A61937>

7