LÍNEA IMAGINARIA
REVISTA DE INVESTIGACIÓN EN ESTUDIOS SOCIALES Y DE FRONTERA

Número 22. Vol. 3 (2025), pp. 52- 96 / octubre - diciembre

ISSN en Línea: 2477-9415 / ISSN Impreso: 2477-9415
Depósito Legal: pp 200602TA2254

ENSAYO

Uso de Geogebra como herramienta didáctica para la comprensión del concepto de Límite

[1]**Manuel Antonio Hoyos Garcia**
eucgal07@gmail.com
ORCID: 0009-0009-9408-0470
Doctorando en Educación
Instituto Pedagógico Rural
"Gervasio Rubio" (IPRGR)
Venezuela

[2]**Eduar Ramiro Burbano Semanate**
eduardburbano1234@hotmail.com
ORCID: 0000-0002-3130-0028
Doctorando en Educación
Instituto Pedagógico Rural
"Gervasio Rubio" (IPRGR)
Venezuela

Recibido: 07/10/2025 **Aprobado: 18/11/2025**

RESUMEN

Este artículo considera el uso de Geogebra como una herramienta valiosa de enseñanza para la comprensión del límite de funciones en estudiantes de undécimo grado. Adopta una metodología cualitativa basada en la observación directa y el análisis de contenido. Así, se compararon dos grupos: uno con guías planas tradicionales (Grupo 1) y el otro con actividades interactivas en un Geogebrabook (Grupo 2), evaluando sus desempeños en la comprensión del concepto mediante rúbricas. Los resultados destacan que Geogebra supera a otros softwares (como Maple, Cabri Geometry o Derive) debido a su accesibilidad, interfaz intuitiva y versatilidad, especialmente integrando recursos como Geogebrabook y applets dinámicos. La investigación enfatizó tres perspectivas clave para la enseñanza de límites: geométrica, algebraica/aritmética y analítica, vinculadas a hitos como el método de exhaución y la noción de infinito. El enfoque diseñado demostró que la mediación tecnológica facilita la manipulación de objetos abstractos, promoviendo una comprensión más profunda en comparación con los métodos tradicionales (Grupo 1), donde las limitaciones materiales dificultaron la comprensión del tópico. Se concluye que la integración de la fenomenología histórica del concepto con herramientas TIC como Geogebra optimiza el aprendizaje, superando obstáculos didácticos y cognitivos, destacando la necesidad de adaptar las prácticas pedagógicas a la complejidad epistemológica de los conceptos matemáticos avanzados.

Palabras clave: Límite, función, modelo ABP, Comprensión, Geogebra**.**

---

[1] Insitución Educativa Simón Bolívar, Garzón, Huila, Colombia. Docente de Matemáticas; UNIR, España. Magister en Didáctica de las mátemáticas; USCO, Colombia, Magister en Estudios Interdisciplinarios de la Complejidad; Estudiante de Doctorado en Educación, UPEL, Rubio, Venezuela

[2] Institución Educativa El Carmelo, La Plata, Huila, Colombia, Coordinador; Uniamazonia, Colombia, Magister en Educación con énfasis en didáctica de la matemática; Estudiante de Doctorado en Educación, UPEL, Rubio, Venezuela

https://doi.org/10.56219/lneaimaginaria.v3i22.4662

Autores:
Manuel Antonio Hoyos Garcia/ *Eduar Ramiro Burbano Semanate*

ABSTRACT

This article examines the use of Geogebra as a valuable teaching tool for enhancing the understanding of function limits among eleventh-grade students. It adopts a qualitative methodology based on direct observation and content analysis. Two groups were compared: one using traditional flat guides (Group 1) and the other engaging with interactive activities in a Geogebrabook (Group 2), with their performance in conceptual understanding assessed through rubrics. The results highlight that Geogebra outperforms other software (such as Maple, Cabri Geometry, or Derive) due to its accessibility, intuitive interface, and versatility, particularly when integrating resources like Geogebrabook and dynamic applets. The research emphasized three key perspectives for teaching limits: geometric, algebraic/arithmetic, and analytical, linked to historical milestones such as the method of exhaustion and the notion of infinity. The designed approach demonstrated that technological mediation facilitates the manipulation of abstract objects, fostering deeper understanding compared to traditional methods (Group 1), where material limitations hindered topic comprehension. It is concluded that integrating the historical phenomenology of the concept with ICT tools like Geogebra optimizes learning, overcoming didactic and cognitive obstacles, and underscores the need to adapt pedagogical practices to the epistemological complexity of advanced mathematical concepts.

Keywords: Limit, function, PBL model, understanding, Geogebra

https://doi.org/10.56219/lneaimaginaria.v3i22.4662

LÍNEA IMAGINARIA
REVISTA DE INVESTIGACIÓN EN ESTUDIOS SOCIALES Y DE FRONTERA
Número 22. Vol. 3 (2025), pp. 52- 96 / octubre - diciembre
ISSN en Línea: 2477-9415 / ISSN Impreso: 2477-9415
Depósito Legal: pp 200602TA2254

Introducción

En el presente artículo, se aborda la noción de límite de funciones como un constructo matemático complejo y fundamental para el análisis. Se propone una estrategia pedagógica para su enseñanza en el nivel de educación media (grado undécimo), con el objetivo de promover una comprensión profunda y establecer una base sólida para el estudio posterior de conceptos como la derivada y la integral. La propuesta se fundamenta en un análisis teórico exhaustivo que busca optimizar las prácticas docentes a través de la exploración de estrategias de enseñanza, dentro de los que se puede destacar el uso de ABP: Aprendizaje Basado en Problemas, y la integración de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC), específicamente para facilitar la aprehensión del concepto de límite de una función. De esta manera, se pretende superar las dificultades tradicionales asociadas a la enseñanza de este tema, fomentando un entendimiento robusto y perdurable en los estudiantes.

La propuesta se sustenta en una revisión teórica detallada de modelos pedagógicos existentes y en la incorporación de recursos digitales, destacando el software de geometría dinámica Geogebra. Esta herramienta se reconoce por su capacidad para potenciar la visualización de ideas abstractas y permitir la estructuración de actividades interactivas que favorecen un aprendizaje más significativo. Partiendo de la dificultad que muchos estudiantes experimentan en la comprensión del límite de una función, la investigación central se plantea la siguiente interrogante: ¿Cómo lograr que el concepto de límite de funciones sea comprendido por estudiantes de grado undécimo,

https://doi.org/10.56219/lneaimaginaria.v3i22.4662

incorporando Geogebra como herramienta didáctica desde la adopción del ABP como estrategia pedagógica?

El objetivo general de esta investigación es diseñar una propuesta didáctica basada en el software Geogebra para facilitar la comprensión del concepto de límite de funciones. Para lograr este objetivo, se plantean los siguientes objetivos específicos:

* En primer lugar, analizar las herramientas tecnológicas que pueden emplearse didácticamente para abordar el concepto de límite.

* En segundo lugar, considerar la fenomenología que dio origen al concepto para, una vez comprendida su esencia matemática, diseñar problemas que orienten su estudio.

* Finalmente, aplicar la estrategia diseñada y analizar los resultados obtenidos en estudiantes de grado undécimo para determinar si la noción del concepto fue efectivamente comprendida.

En coherencia con la orientación y el enfoque pedagógico definidos, se ha desarrollado un marco teórico que proporciona sustento y profundidad al trabajo de investigación. Este análisis incluye una revisión exhaustiva de estudios previos relacionados con las problemáticas inherentes a la enseñanza de las matemáticas, los desafíos asociados a la comprensión del concepto de límite y el impacto del modelo de Aprendizaje Basado en Problemas (ABP) en la educación matemática. Adicionalmente, se enfatiza el valor de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC), resaltando especialmente el potencial del software Geogebra como una herramienta

https://doi.org/10.56219/lneaimaginaria.v3i22.4662

LÍNEA IMAGINARIA
REVISTA DE INVESTIGACIÓN EN ESTUDIOS SOCIALES Y DE FRONTERA
Número 22. Vol. 3 (2025), pp. 52- 96 / octubre - diciembre
ISSN en Línea: 2477-9415 / ISSN Impreso: 2477-9415
Depósito Legal: pp 200602TA2254

fundamental en los procesos de enseñanza y aprendizaje, con un enfoque particular en su aplicación dentro del análisis matemático.

Finalmente, se presentan los resultados derivados de la implementación de la propuesta pedagógica diseñada, cuya principal innovación reside en un recurso interactivo desarrollado con Geogebra. Este material, compuesto por nueve problemas contextualizados y enriquecido con animaciones dinámicas que aprovechan la funcionalidad de los deslizadores de la herramienta, facilita la comprensión del concepto de límite. El enfoque adoptado se basa en la metodología propuesta por Blázquez y Ortega (2002), ofreciendo una experiencia didáctica orientada a la construcción progresiva del conocimiento matemático.

Método

En coherencia con el primero de los objetivos del trabajo, se establece la selección del software de geometría dinámica, a partir de la revisión de diversas investigaciones relacionadas con el concepto de límite y el uso de tecnologías educativas, como el software GeoGebra destacado en el trabajo de Toledo (2017), se resalta también el estudio de Gutiérrez-González (2019) sobre límites y derivadas empleando geometría dinámica, así como las ventajas del ABP señaladas en el trabajo de Alzate et al. (2013) para la enseñanza de matemáticas. En este contexto, el presente estudio utiliza una metodología cualitativa, alineándose con Bernal (2006), al enfocarse en un análisis interpretativo y contextualizado. Conforme a lo anterior, se opta por la *observación*

https://doi.org/10.56219/lneaimaginaria.v3i22.4662

directa como técnica de investigación, donde los investigadores fueron *participantes* en el sentido de que permitieron resolver dudas a los estudiantes, guiaron el desarrollo de las sesiones relacionadas con el tópico objeto estudio y valoraron cada aporte y noción que se fue dando dentro de los desarrollos conforme a lo propuesto para cada una de las sesiones en las que se trabajó el concepto.

Los estudiantes elegidos fueron de grado undécimo puesto que en ese nivel es que se establece el límite de funciones para ser orientado, ya que se trata de un concepto complejo dentro del pensamiento matemático avanzado. Así, se tomaron dos cursos, uno de 23 estudiantes (Grupo 1) al cual se le dio una guía plana tipo libro de texto, para el desarrollo de la propuesta y otro de 24 (grupo 2) los cuales trabajaron directamente la aplicación generada desde Geogebra. Los datos recopilados fueron básicamente las respuestas y análisis propios hechos desde cada grupo respecto a los problemas plateados. Tales respuestas y argumentaciones hechas por parte de los respectivos grupos, se analizaron desde el contenido relacionado con la comprensión del concepto de límite en coherencia con los pasos seguidos en los problemas y las concepciones que se buscaba promover en cada uno. Por ello, se consolidaron de manera sintetizada, rúbricas evaluativas que, al final dan una idea resumida de lo que, desde la observación directa y el análisis de contenido podría relacionarse con la comprensión del concepto de límite.

En ese orden de ideas, para la consolidación de los problemas y de la aplicación en general de Geogebra, se destaca una revisión bibliográfica previa sobre las principales

https://doi.org/10.56219/lneaimaginaria.v3i22.4662

Número 22. Vol. 3 (2025), pp. 52- 96 / octubre - diciembre
ISSN en Línea: 2477-9415 / ISSN Impreso: 2477-9415
Depósito Legal: pp 200602TA2254

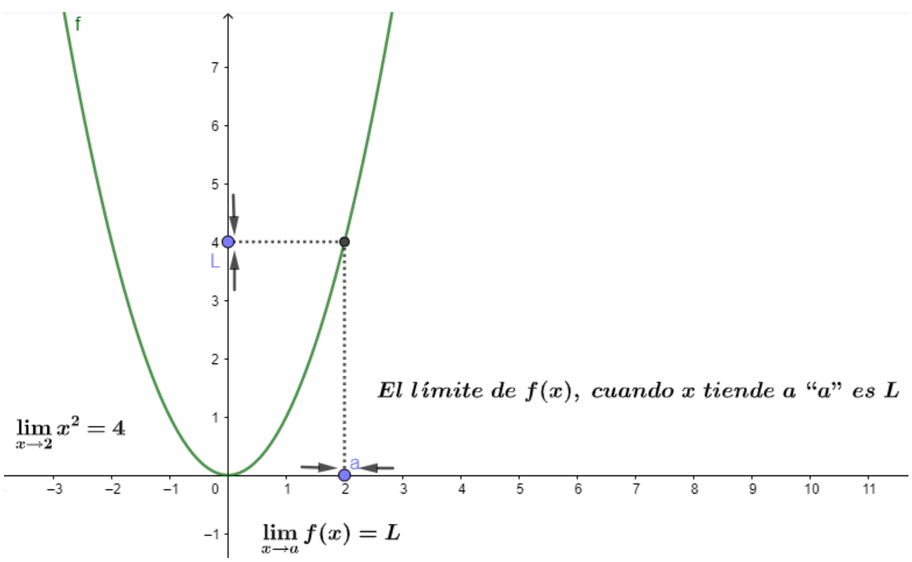
dificultades en la enseñanza de las matemáticas y del concepto en cuestión. Se referencia así a Brousseau (1989), mencionando que las dificultades en la enseñanza de las matemáticas se originan principalmente en tres tipos de obstáculos: epistemológicos, vinculados a la complejidad intrínseca de los conceptos matemáticos; didácticos, derivados de estrategias pedagógicas inadecuadas; y ontogénicos, relacionados con las características cognitivas y psicológicas de los estudiantes. Además, el carácter abstracto y formal de las matemáticas las hace especialmente desafiantes y propensas a generar confusión.

Por su parte, Socas (1997) complementa esta perspectiva señalando que las dificultades no siempre recaen exclusivamente en los alumnos. Estas pueden estar influenciadas también por las prácticas docentes, las cuales a veces obstaculizan el aprendizaje. Las causas abarcan desde la complejidad inherente a los conceptos, hasta factores como el desarrollo cognitivo de los estudiantes, la calidad de las bases formativas previas, e incluso las emociones o actitudes hacia las matemáticas. Por otro lado, Posso et al. (2007) subrayan que en los niveles de primaria y secundaria predominan prácticas pedagógicas basadas en la memorización mecánica y el aprendizaje repetitivo, lo cual genera desinterés, apatía y falta de comprensión significativa de los conceptos. Por último, Barallobres (2017) resalta la importancia de contextualizar la enseñanza de conceptos matemáticos, como el de límite, teniendo en cuenta tanto los fenómenos asociados como los factores institucionales y contextuales, elementos fundamentales para construir aprendizajes significativos.

https://doi.org/10.56219/lneaimaginaria.v3i22.4662

Consecuentemente, de acuerdo con Pons (2014), el concepto de límite puede considerarse de alta complejidad, no solo por su definición, sino también por los retos que implica debido a su importancia, ya que resulta fundamental en la estructura del análisis matemático, por ello, se estudian las dificultades encontradas desde la perspectiva de Brousseau (1989). Así, epistemológicamente, de acuerdo con Blázquez y Ortega (2001), el desarrollo de la definición formal del concepto de límite fue el resultado de un largo proceso histórico, lo cual se detalla con precisión en su estudio. Además, se señala que el límite presenta diversas formas de representación, que, aunque equivalentes en significado, varían según el contexto en que se aplican. Estas incluyen expresiones verbales, numéricas, gráficas y simbólicas, cada una con sus particularidades, como se muestra en la figura 1.

Figura 1. *Representaciones del concepto de límite de funciones.*



Fuente: Elaboración propia

https://doi.org/10.56219/lneaimaginaria.v3i22.4662

Número 22. Vol. 3 (2025), pp. 52- 96 / octubre - diciembre
ISSN en Línea: 2477-9415 / ISSN Impreso: 2477-9415
Depósito Legal: pp 200602TA2254

En consideración de los obstáculos didácticos, y, dando cumplimiento al segundo de los objetivos específicos, es necesario resaltar que, según Trujillo et al. (2017), la falta de incorporación de los hitos que han dado lugar a diferentes concepciones del objeto matemático en el diseño de estrategias de aula puede generar problemas que dificultarían procesos de enseñanza y aprendizaje, derivando en obstáculos didácticos. Además, como se observa en los obstáculos epistemológicos ilustrados en la figura 1, el concepto de límite de una función cuenta con múltiples representaciones que, al no considerarse herramientas como gráficas, tablas de datos o algoritmos para facilitar la comprensión de los estudiantes puede convertirse en un impedimento significativo en su aprendizaje.

Ahora, frente a los obstáculos que yacen desde las características cognitivas y psicológicas inherentes a los estudiantes, es decir, desde la perspectiva ontogénica, según Socas (1997), no considerar las etapas del progreso o desarrollo intelectual de los estudiantes al introducir objetos matemáticos constituye un obstáculo significativo. Por ejemplo, abordar el concepto de límite sin asegurar una comprensión adecuada del concepto de función refleja un obstáculo ontogénico, lo que se traduce en errores o en una falta de apropiación del conocimiento. Asimismo, el autor destaca que la dependencia de experiencias intuitivas, a menudo carentes de objetividad, puede dificultar la comprensión del límite, especialmente en estudiantes que no han desarrollado un pensamiento lógico formal o deductivo, indispensable para este nivel de abstracción.

https://doi.org/10.56219/lneaimaginaria.v3i22.4662

Además, resulta importante considerar que las actitudes negativas hacia las matemáticas, influidas por factores emocionales o experiencias previas, generan apatía y falta de interés, obstaculizando la comprensión de conceptos como el límite de una función, tópico que, por complejidad conceptual, conlleva de no solo aptitud matemática, también es benéfico contar con elementos de gusto e interés hacia el aprendizaje. Por último, se señala que creencias o temores infundados de origen cultural, social o familiar también contribuyen a dificultades crecientes, afectando tanto la comprensión como la motivación para aprender temas matemáticos en el aula.

El siguiente punto que sintetiza este artículo es el porqué del uso del modelo ABP para estructurar la propuesta, de ese modo, se recalca que, según Morales y Landa (2004), los desafíos que enfrentarán los futuros profesionales superan los límites de las disciplinas tradicionales, exigiendo enfoques novedosos y habilidades para abordar problemas de alta complejidad. Estos retos se caracterizan por su naturaleza integradora, dinámica, interdisciplinaria y creativa, tanto en su análisis como en sus posibles soluciones. En este contexto, el modelo de aprendizaje basado en problemas (ABP) se presenta como una opción adecuada para la enseñanza del concepto de límite, destacándose por su capacidad para abordar problemáticas de este tipo y su afinidad con la enseñanza de las matemáticas.

De manera continua, se indagó sobre modelos que pudieran favorecer la comprensión del concepto, tras haber señalado ya los principales obstáculos. Así, se elige el aprendizaje basado en problemas como el más apropiado, esto con base a las

https://doi.org/10.56219/lneaimaginaria.v3i22.4662

LÍNEA IMAGINARIA
REVISTA DE INVESTIGACIÓN EN ESTUDIOS SOCIALES Y DE FRONTERA
Número 22. Vol. 3 (2025), pp. 52- 96 / octubre - diciembre
ISSN en Línea: 2477-9415 / ISSN Impreso: 2477-9415
Depósito Legal: pp 200602TA2254

bondades se destacan a continuación, en comparación con modelos actuales como por ejemplo el flipped classroom y el aprendizaje basado en proyectos. Consecuentemente, siguiendo la perspectiva de Freudenthal (1983) y los planteamientos de Bressan et al. (2004), es crucial enfatizar que el proceso de matematización, entendido como la construcción activa de conocimientos matemáticos, debe priorizarse por encima de la simple transmisión de resultados finales descontextualizados. En este marco, se subraya la relevancia de la algoritmización y la algebrización como procesos que promueven habilidades cognitivas y competencias, en contraste con la mera memorización de algoritmos o formulaciones algebraicas.

En el anterior sentido, se destaca la importancia de implementar el ABP como estrategia didáctica para enseñar el concepto de límite en matemáticas, se considera su compatibilidad con el uso de herramientas tecnológicas y la posibilidad adicional de vincular temáticas complejas que suponen un reto para ser aprendidas. Se destaca entonces desde el trabajo investigativo, este enfoque que busca conectar el aprendizaje de los estudiantes con las situaciones problemáticas históricas que dieron origen al concepto; así se promueve favorecer una comprensión más significativa del tópico objeto de estudio. Sobre este último aspecto, cabe referenciar algunos autores que justifican la elección; algunos referentes tomados fueron:

Bejarano et al. (2015) argumentan que adoptar el ABP requiere integrar fundamentos teóricos, renovar las prácticas pedagógicas y validar propuestas educativas que sitúen al estudiante como eje central del proceso formativo. Este

https://doi.org/10.56219/lneaimaginaria.v3i22.4662

modelo se basa en proporcionarles oportunidades para participar activamente y construir conocimiento a partir de problemas reales, siendo la comprensión histórica del límite una pieza clave para dotar de sentido a este concepto. Por su parte, Alzate et al. (2013) destacan que el ABP incentiva el interés estudiantil por las matemáticas, permitiéndoles aplicar los conceptos aprendidos a situaciones reales. Además, recomiendan incluir herramientas digitales, ya que estas contribuyen a consolidar el aprendizaje mediante la interacción con tecnologías, lo que refuerza la apropiación y comprensión del límite desde una perspectiva innovadora.

En cuanto a Morales y Landa (2004), estas autoras subrayan que el ABP promueve habilidades críticas, fomenta la reflexión estratégica para resolver problemas y prioriza la retención y aplicación práctica del conocimiento adquirido. Finalmente, Cruz (2006) resalta que esta metodología demanda una revisión rigurosa del contenido y del contexto en que se imparte, siendo el análisis epistemológico del concepto de límite esencial para abordar las dificultades asociadas y comprender su evolución a lo largo del tiempo.

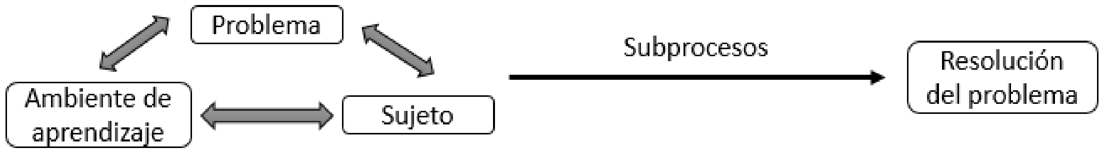
Posteriormente, al contar ya con una elección del modelo pedagógico a usar, se sugiere el uso de una herramienta didáctica que potencie el propósito del trabajo y que facilite el manejo de las variables generales del proceso de resolución de problemas enmarcadas en la figura 2 y que corresponden a la complejidad de usar la resolución de problemas como estrategia de enseñanza, mostrando que, no solo el problema debe ser planteado adecuadamente, también se debe considerar el ambiente de

https://doi.org/10.56219/lneaimaginaria.v3i22.4662

Número 22. Vol. 3 (2025), pp. 52- 96 / octubre - diciembre
ISSN en Línea: 2477-9415 / ISSN Impreso: 2477-9415
Depósito Legal: pp 200602TA2254

aprendizaje y la activación del sujeto dentro de los propósitos formativos que se producen en sus producciones dentro de la búsqueda de soluciones a las situaciones.

Figura 2. *Aspectos genéricos en el proceso de resolución de problemas.*



Fuente: Basado en D’Amore y Zan, 1996

Para ello, siendo concordantes con el trabajo de Toledo (2017), se enfatiza en la amplia gama de software matemáticos disponibles para fines educativos, destacando especialmente las capacidades del programa Geogebra, desarrollado por Markus Hohenwarter y un equipo especializado a nivel internacional. Este software combina herramientas avanzadas con accesibilidad gratuita, una característica que lo distingue de otras aplicaciones como Derive, Maple y Cabri Geometry. Justo es este último, un elemento de gran valor para optar por él. En adición, se destaca su interfaz intuitiva y accesible; según Mora (2012), Geogebra destaca por su instalación sencilla y su interfaz atractiva, que permite a usuarios de diferentes niveles educativos adaptarse rápidamente. Además, en una misma ventana, combina representaciones gráficas y algebraicas, lo cual facilita la comprensión visual. En contraste, Maple y Derive presentan interfaces menos amigables para usuarios con poca experiencia tecnológica, y Cabri Geometry carece de visualizaciones integradas como las de Geogebra.

Por otro lado, desde su animación y dinamismo en la enseñanza, Geogebra permite

https://doi.org/10.56219/lneaimaginaria.v3i22.4662

la creación de animaciones dinámicas mediante herramientas como el deslizador, lo que resulta especialmente útil para explorar conceptos como el límite de una función (Toledo, 2017). Aunque Maple también ofrece opciones de animación, estas requieren una mayor formalidad en su configuración, lo que limita su uso didáctico en comparación con la flexibilidad de Geogebra. Se tiene, además, su acceso gratuito y versatilidad, puesto que, la gratuidad de Geogebra es una ventaja significativa, ya que facilita su uso tanto en instituciones educativas como en hogares. Además, su funcionalidad no depende de la instalación, ya que las herramientas están disponibles en su sitio web. El software permite guardar archivos en formatos como ".ggb" y ".html", lo que posibilita su edición y uso en navegadores y dispositivos móviles, como señala Mora (2012).

Por último, la compatibilidad con estrategias pedagógicas avanzadas, hace que Geogebra también sobresalga por la posibilidad de crear materiales interactivos como ***applets*** o Geogebrabooks, ideales para estructurar actividades basadas en ABP. Estas herramientas facilitan la exploración de conceptos matemáticos a través de animaciones manipulables en diversos dispositivos, desde ordenadores hasta tablets o smartphones, así, Geogebra se posiciona como una herramienta integral que combina accesibilidad, dinamismo y compatibilidad tecnológica, lo que lo convierte en una opción preferida para la enseñanza de concepciones matemáticas avanzadas como es el caso del límite de funciones.

Continuando en la realización de la propuesta, al tener la guía con el modelo y la

https://doi.org/10.56219/lneaimaginaria.v3i22.4662

LÍNEA IMAGINARIA
REVISTA DE INVESTIGACIÓN EN ESTUDIOS SOCIALES Y DE FRONTERA
Número 22. Vol. 3 (2025), pp. 52- 96 / octubre - diciembre
ISSN en Línea: 2477-9415 / ISSN Impreso: 2477-9415
Depósito Legal: pp 200602TA2254

herramienta a usar, entonces se estructura un geogebrabook con 9 problemas secuenciales que, de acuerdo con Rendón (2017), abordan diversos hitos y aplicaciones interdisciplinarias, destacando particularmente aquellas provenientes de la Física. Entre estas, se incluyen el análisis de la variación en velocidad y aceleración, así como el estudio de áreas o perímetros a partir de una perspectiva geométrica. Además, se explora la noción de acercamiento e infinito, desde la paradoja de Zenón y se analiza la determinación de números irracionales como límites de sucesiones convergentes. Todo esto culmina en la introducción y comprensión de la simbología del límite, permitiendo una asimilación progresiva de la definición moderna basada en la notación épsilon-delta. El geogebrabook se evidencia en https://www.geogebra.org/m/dx4qcc7n y cada problema obedece a la síntesis de pasos que se muestran en la tabla 1.

Tabla 1. Componentes del ABP

o.	Descripción	Acciones
	Planteamiento y estudio del problema	Se formula por parte del docente, el problema a abordar para estudiar sus elementos y características.
	Propuesta de alternativas y acotamiento	Se brinda la posibilidad a los estudiantes para que ideen cómo encarar el problema y establezcan delimitaciones en el mismo.
	Datos disponibles y aspectos por investigar	Los estudiantes deben identificar elementos que proporciona el problema y considerar qué elementos se deben indagar
	Elaboración de abordajes viables	De acuerdo a los elementos anteriores, se componen posibles maneras de abordar el problema.

https://doi.org/10.56219/lneaimaginaria.v3i22.4662

Presentación de solución y conclusiones	Se sintetiza una posible solución y se comparte con compañeros

Fuente: Síntesis con base a Leiva (2016) e Hidalgo et al. (2015)

Conforme se estructura la propuesta, entonces se procede a tomar dos grupos de estudio del grado undécimo, un primer grupo conformado por 23 estudiantes, trabaja los problemas relacionados en el Geogebrabook pero sin el dinamismo del programa, solo los trabaja como guía didáctica plana y tradicional y un segundo grupo de 24 los aborda haciendo uso del software y sus bondades. Del anterior modo, desde un enfoque cualitativo, se puede contrastar lo obtenido por uno y otro grupo en términos de comprensión del objeto matemático en cuestión. De este modo, se da cumplimiento al último de los objetivos específicos que se enmarcan en la introducción del presente artículo y en el siguiente apartado, se resaltan los hallazgos.

Resultados

Como se menciona en el apartado anterior, se propone una aplicación de 9 problemas coherentemente ordenados los cuales obedecen a la evolución conceptual del tópico y los principales hitos que fueron sentando las bases para su estructuración final. De este modo, en la tabla 2, se enuncian los 9 problemas subdivididos en grupos de tres, para favorecer la comprensión desde las perspectivas Geométricas, Algebraica-Aritmética y Analítica, lo anterior se establece según la evolución histórica, elementos didácticos, ontogénicos y fenomenológicos del tópico.

https://doi.org/10.56219/lneaimaginaria.v3i22.4662

LÍNEA IMAGINARIA
REVISTA DE INVESTIGACIÓN EN ESTUDIOS SOCIALES Y DE FRONTERA

Número 22. Vol. 3 (2025), pp. 52- 96 / octubre - diciembre
ISSN en Línea: 2477-9415 / ISSN Impreso: 2477-9415
Depósito Legal: pp 200602TA2254

Tabla 2. Relación de problemas y perspectiva del concepto de límite

Problemas estructurados para la comprensión del concepto de límite de una función		
Problema	**Situación**	**Perspectiva**
1	Sistemas de riego	Noción de Límite desde una perspectiva Geométrica
2	Área y perímetro (Círculo)	
3	¿Segmentos infinitamente pequeños?	
4	Aquiles y la tortuga	Límite desde la perspectiva Algebraica-Aritmética
5	El número de Euler	
6	Velocidad instantánea	
7	Comportamiento de empresas	Límite desde la comprensión de su definición
8	Formalidad del límite	
9	Entrenar más, mejora mi rendimiento	

Fuente: Elaboración propia

La aplicación del Geogebrabook, el cual se integra en el link https://www.geogebra.org/m/dx4qcc7n se realiza planificando las clases respectivas con sus momentos que integran los pasos del ABP expuestos en el apartado anterior. También se vincula para cada problema, en los tiempos planificados, la respectiva rúbrica evaluativa que permitió valorar los desempeños de los estudiantes. En la figura 3 se aprecia una planeación didáctica de una sesión de clase dispuesta a abordar el primero de los problemas y en la tabla 3 se plasman los desempeños esperados en sus distintos niveles, mediante una rúbrica evaluativa que servirá como elemento de validación para la comprensión última del concepto y de las nociones generadas tras el

https://doi.org/10.56219/lneaimaginaria.v3i22.4662

avance en cada problema.

Figura 3. *Planificación de clase: aproximación al límite usando un problema sobre sistemas de riego.*

Sesión: 1	**Bloque de contenidos:** Bloque 3-Análisis	**Duración:** 2 clases de 50 minutos
Asignatura: Matemáticas I		**Curso:** 1° Bachillerato
Objetivos: Determinar o extraer conclusiones en situaciones reales a partir de la noción de límite y el estudio del límite de una función en un punto. • Utilizar con solvencia y responsabilidad las TIC promoviendo hábitos de estudio que generen aprovechamiento eficaz del aprendizaje		**Contenidos:** Concepto de límite de una función en un punto y en el infinito.
Indicadores: • Establece cuestiones y conjeturas relacionadas con el límite de áreas usando Geogebra. • Resuelve problemas relacionados con el límite, de forma individual y cooperativa • Hace uso adecuado y responsable de las herramientas tecnológicas para reflexionar sobre su propio aprendizaje		**Criterio general de evaluación:** Comprender y utilizar los conceptos de límite y continuidad de una función aplicándolos en el cálculo de límites y el estudio de la continuidad de una función en un punto o un intervalo.

	MOMENTO DE LA CLASE – (Agrupamiento)	**COMPETENCIAS**
(P[4])	INICIO (individual[5]), se hace una presentación de la metodología a trabajar y muestra general del Geogebrabook (https://www.geogebra.org/m/dx4qcc7n), permitiendo ver a los estudiantes que se harán 9 problemas desde el navegador web, el uso de Geogebra y los razonamientos en papel y lápiz (20 min). Luego, se hará una exploración de Geogebra y sus herramientas a usar, se espera los estudiantes ya tengan saberes previos sobre el uso del software, de no ser así, igual se instruirá sobre todo lo básico, que entre otras cosas incluye la graficación de funciones, la vinculación de puntos sobre objetos, el uso de deslizadores, la construcción de polígonos, entre otras cosas (20 min).	CCL CMCT CD
1	Presentación del problema 1 (10 min-In), el link del problema es:	CD
	https://www.geogebra.org/m/fznm9u4e  En primera instancia, se muestra el contexto de la situación a analizar, que para éste primer problema se relaciona con los sistemas de aspersión para el riego de cultivos. Luego, se revisa el video para una mejor ilustración y se plantea el problema a resolver. Entrando al link se visualiza todo lo relacionado a cómo abordar el problema desde la aplicación de los pasos inherentes al modelo ABP.	CSC
2	Ideas sobre solución al problema (10 min): En este paso, conforme a saberes previos y creatividad individual, se tratará de exponer al docente cómo abordar el problema.	CPAA
	DESARROLLO	
3	Investigación (10 min-In): Dentro de los propósitos del problema, se espera que los estudiantes indaguen sobre el método de exhaución y cómo a través de polígonos inscritos o circunscritos, se puede ir acercando al área de un círculo. Para esto, podrán usar la red e incluso buscar actividades en Geogebra relacionadas con esos temas. Posterior a la indagación, se espera que listen los elementos que tienen y los que no, y se requieren para resolver el problema. El docente estará presto a orientar.	CMCT CEC
4	Trabajo en el Applet (20 min-In): Tras la presentación de ideas, la investigación y orientación respectiva, en el Applet se dinamizan dos posibles modelos que podrían pensarse como soluciones al problema. 	CMCT CPAA y CD
	EVALUACIÓN: (Ver rúbrica en el anexo 2)	
5	Debate de conclusiones (10 min-Pa): Dentro del propósito formativo de la evaluación, se valorará que se debata con compañero las conclusiones relacionadas con el problema.	CCL, CMCT CPAA, CD y CSC
RECURSOS: *Aula de informática, Ordenadores, Geogebrabook, proyector, Youtube, Internet, cuaderno y esfero; Docente y estudiantes*		

Fuente: Elaboración propia

Tabla 3. Rúbrica evaluativa: aproximación al límite usando un problema sobre sistemas de riego

Indicadores y criterios de evaluación	**Nivel 1 Superior** **4.5 - 5**	**Nivel 2 Alto** **3.9 - 4.4**	**Nivel 3 Básico** **3 - 3.8**	**Nivel 4 Bajo** **1 - 2.9**	**Nivel**	**Puntuación**
Plantea interrogantes e hipótesis sobre el límite de áreas mediante el uso de Geogebra[3].	Muestra habilidad para plantear interrogantes e hipótesis sobre el límite de áreas mediante el uso de	Plantea interrogantes e hipótesis sobre el límite de áreas mediante el uso de Geogebra	Con algunas dificultades, plantea interrogantes e hipótesis sobre el límite de áreas mediante el uso de	Presenta dificultades notables para plantear interrogantes e hipótesis sobre el límite de áreas		

3 Se aclara que, para el grupo que no usó el software, este criterio se omite.

https://doi.org/10.56219/lneaimaginaria.v3i22.4662

LÍNEA IMAGINARIA
REVISTA DE INVESTIGACIÓN EN ESTUDIOS SOCIALES Y DE FRONTERA

Número 22. Vol. 3 (2025), pp. 52- 96 / octubre - diciembre
ISSN en Línea: 2477-9415 / ISSN Impreso: 2477-9415
Depósito Legal: pp 200602TA2254

	Geogebra		Geogebra	mediante el uso de Geogebra
Soluciona problemas sobre límite de funciones de forma individual y cooperativa.	Es hábil para solucionar problemas sobre límite de funciones de forma individual y cooperativa	Soluciona problemas sobre límite de funciones de forma individual y cooperativa	Con algunas dificultades, soluciona problemas sobre límite de funciones de forma individual y cooperativa	No logra solucionar problemas sobre límite de funciones de forma individual ni cooperativa
Emplea responsablemente recursos tecnológicos para evaluar su propio aprendizaje.	De manera ejemplar, emplea responsablemente recursos tecnológicos para evaluar su propio aprendizaje	Emplea responsablemente recursos tecnológicos para evaluar su propio aprendizaje	Algunas veces emplea responsablemente recursos tecnológicos para evaluar su propio aprendizaje	No emplea responsablemente recursos tecnológicos para evaluar su propio aprendizaje
		Total		

Fuente: Elaboración propia

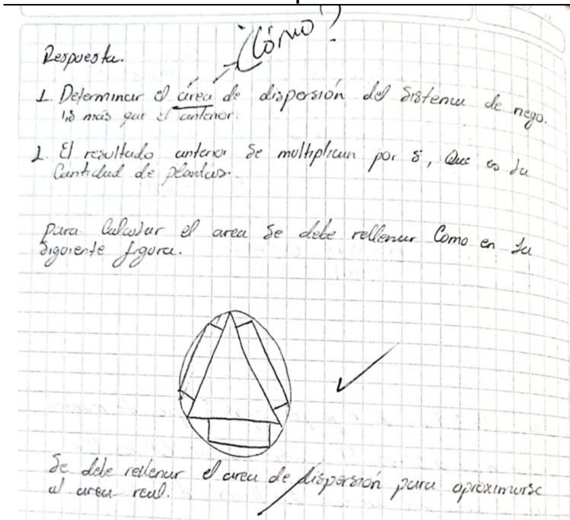
Conforme a lo anterior, la aplicación se torna un producto que busca una mejora significativa en la comprensión del concepto de límite de funciones. A modo de ejemplo, en las próximas figuras, se muestran elementos de los estudiantes al abordar cada pregunta en los dos grupos que fueron partícipes del trabajo. Así, en la figura 4, se evidencian las aproximaciones a la solución del problema 1, en la izquierda se muestra lo realizado por el grupo 1, el cual no usó los links ni applets dinámicos de Geogebra sino guías impresas sin posibilidad de interacción, mientras a la derecha se ve lo realizado por el grupo 2, quienes sí interactuaron con las applets del problema. Se inicia entonces con el problema 1, el cual se ilustra en el link:

https://www.geogebra.org/m/dx4qcc7n#material/fznm9u4e

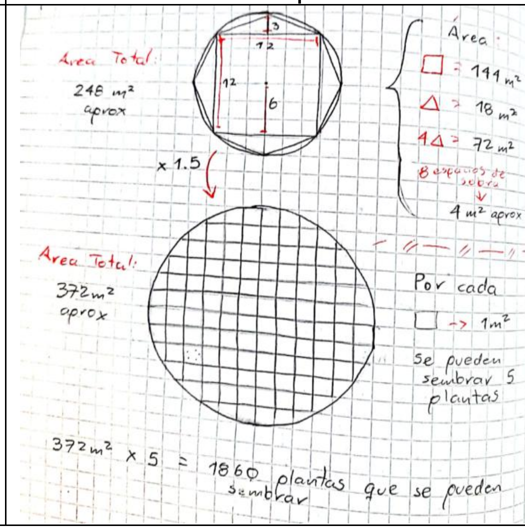
Figura 4. *Respuestas al problema: Sistemas de riego.*

https://doi.org/10.56219/lneaimaginaria.v3i22.4662

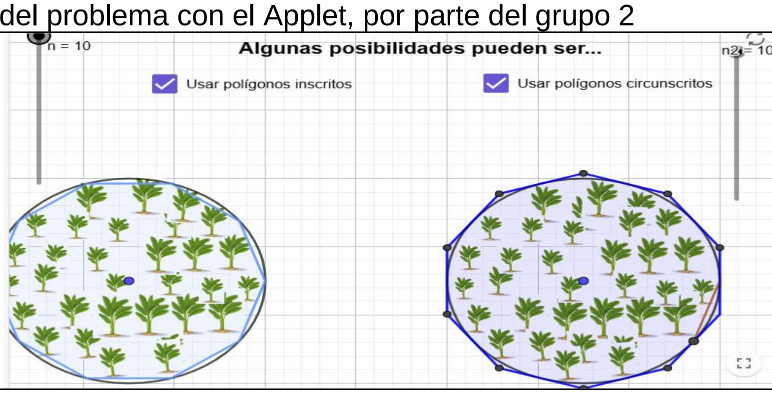
Grupo 1



Grupo 2



Dinamización del problema con el Applet, por parte del grupo 2



Fuente: Elaboración propia

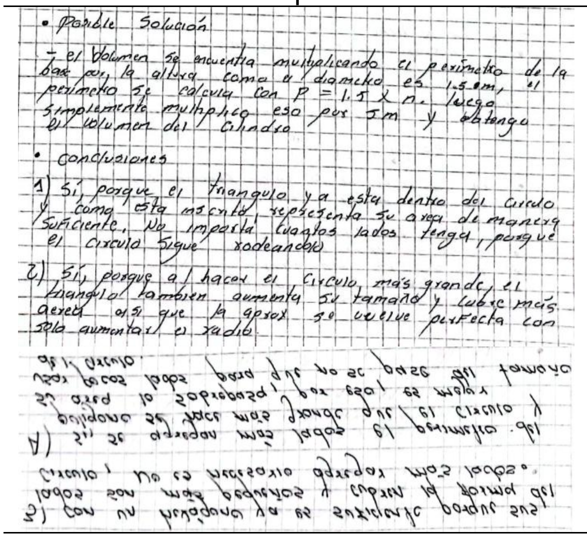
En la figura 4, se deja una muestra de la interpretación inicial del concepto desde la cotidianidad de los estudiantes, para ello, se presenta una situación relacionada con los sistemas de riego. Se vislumbra una mejor aproximación en el grupo 2, con lo que se manifiesta la importancia del software y en general, de la dinamización del concepto de límite en esta etapa inicial. Continuando, en la figura 5 se muestra la comparación entre las conclusiones del grupo 1 y 2 para la solución al problema 2 (https://www.geogebra.org/m/dx4qcc7n#material/sts5wdfr).

https://doi.org/10.56219/lneaimaginaria.v3i22.4662

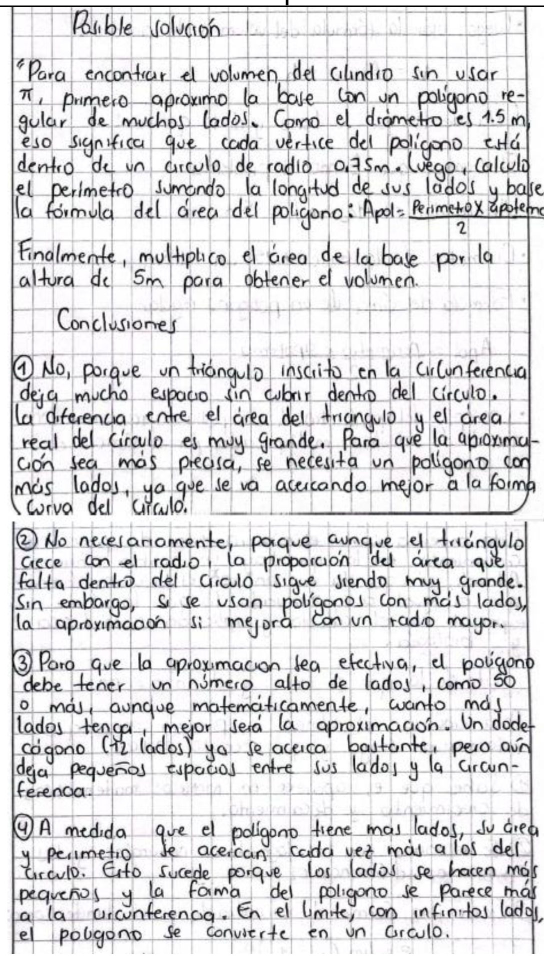
LÍNEA IMAGINARIA
REVISTA DE INVESTIGACIÓN EN ESTUDIOS SOCIALES Y DE FRONTERA
Número 22. Vol. 3 (2025), pp. 52- 96 / octubre - diciembre
ISSN en Línea: 2477-9415 / ISSN Impreso: 2477-9415
Depósito Legal: pp 200602TA2254

Figura 5. *Respuestas al problema 2: Área y perímetro (Círculo)***.**

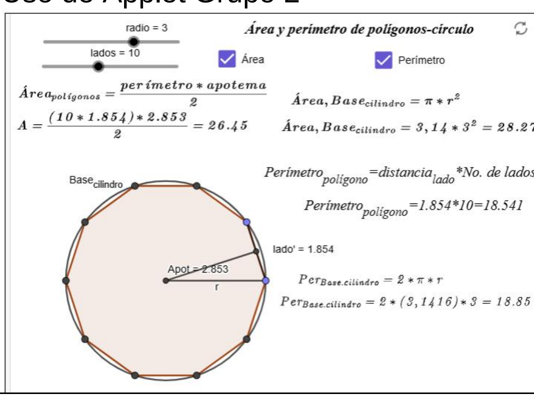
Grupo 1


• Posible Solución
– el volumen se encuentra multiplicando el perímetro de la base por la altura como el diámetro es 1.5 m, el perímetro se calcula con P = 1.5 x π. luego simplemente multiplico eso por 5 m y obtengo el volumen del cilindro
• conclusiones
1) Sí, porque el triangulo ya esta dentro del circulo y como esta inscrito, representa su area de manera suficiente. No importa cuantos lados tenga, porque el circulo sigue rodeandolo
2) Sí, porque al hacer el circulo más grande, el triangulo tambien aumenta su tamaño y cubre más aerea asi que la aprox se vuelve perfecta con solo aumentar el radio

Grupo 2


Posible solución
*Para encontrar el volumen del cilindro sin usar π, primero aproximo la base con un polígono regular de muchos lados. Como el diámetro es 1.5 m, eso significa que cada vértice del polígono está dentro de un círculo de radio 0.75m. Luego, calculo el perímetro sumando la longitud de sus lados y base la fórmula del área del polígono: Apol = $\frac{\text{Perímetro} \times \text{apotema}}{2}$
Finalmente, multiplico el área de la base por la altura de 5m para obtener el volumen.
Conclusiones
① No, porque un triángulo inscrito en la circunferencia deja mucho espacio sin cubrir dentro del círculo. La diferencia entre el área del triángulo y el área real del círculo es muy grande. Para que la aproximación sea más precisa, se necesita un polígono con más lados, ya que se va acercando mejor a la forma curva del círculo.
② No necesariamente, porque aunque el triángulo crece con el radio, la proporción del área que falta dentro del círculo sigue siendo muy grande. Sin embargo, si se usan polígonos con más lados, la aproximación sí mejora con un radio mayor.
③ Para que la aproximación sea efectiva, el polígono debe tener un número alto de lados, como 50 o más, aunque matemáticamente, cuanto más lados tenga, mejor será la aproximación. Un dodecágono (12 lados) ya se acerca bastante, pero aún deja pequeños espacios entre sus lados y la circunferencia.
④ A medida que el polígono tiene más lados, su área y perímetro se acercan cada vez más a los del círculo. Esto sucede porque los lados se hacen más pequeños y la forma del polígono se parece más a la circunferencia. En el límite, con infinitos lados, el polígono se convierte en un círculo.

Uso de Applet Grupo 2



Fuente: Elaboración propia

Como se muestra en el grupo 2, las respuestas a las preguntas orientadoras fueron mucho más estructuradas y se acercan más al entendimiento de la idea inicial de límite, por su parte en el grupo 1, aunque no se dio la interacción con el Geogebrabook, se realizó el acompañamiento respectivo y se logran respuestas

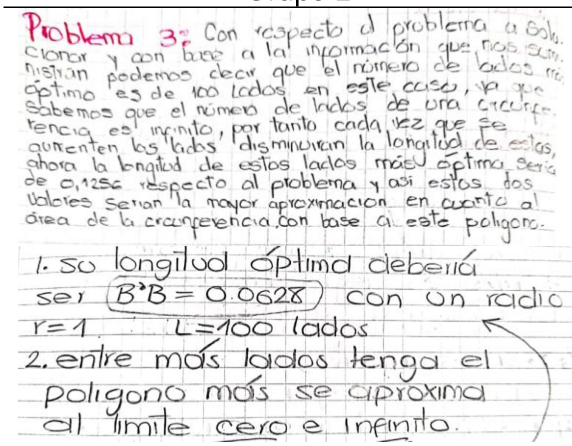
https://doi.org/10.56219/lneaimaginaria.v3i22.4662

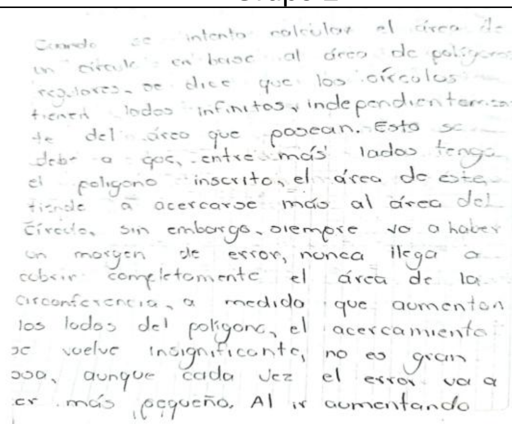
Autores:
Manuel Antonio Hoyos Garcia/ *Eduar Ramiro Burbano Semanate*

válidas, aunque menos completas que las del grupo homólogo. Es de recalcar que, este y el anterior problema acercan a los estudiantes a la idea intuitiva de límite desde el uso de la geometría y más precisamente desde la noción de lados infinitos en lo que, históricamente se conoció como método de exhaución.

En la figura 6 se muestra la comparación entre las conclusiones del grupo 1 y 2 para la solución al problema 3 (https://www.geogebra.org/m/dx4qcc7n#material/c9xwazv4), el cual se relaciona con los dos anteriores, puesto que, trata de la síntesis del método de exhaución dentro de una situación específica de las matemáticas, a saber, el cálculo del área en polígonos que conlleven al área de un círculo cuya medida es necearía para considerar por ejemplo, el volumen de cilindros o la disposición de las plantas en el problema 1.

Figura 6. *Respuestas al problema 3: ¿Segmentos infinitamente pequeños?*

<table>
<tr><th>Grupo 1</th><th>Grupo 2</th></tr>
<tr><td>
Problema 3: Con respecto al problema a solucionar y con base a la información que nos suministran podemos decir que el número de lados más óptimo es de 100 lados en este caso, ya que sabemos que el número de lados de una circunferencia es infinito, por tanto cada vez que se aumenten los lados disminuiran la longitud de estos, ahora la longitud de estos lados más óptima sería de 0,1256 respecto al problema y así estos dos valores serian la mayor aproximación en cuanto al área de la circunferencia con base a este poligono.
1. su longitud óptima debería ser $B'B = 0.0628$ con un radio $r=1$. $L=100$ lados
2. entre más lados tenga el poligono más se aproxima al límite cero e infinito.

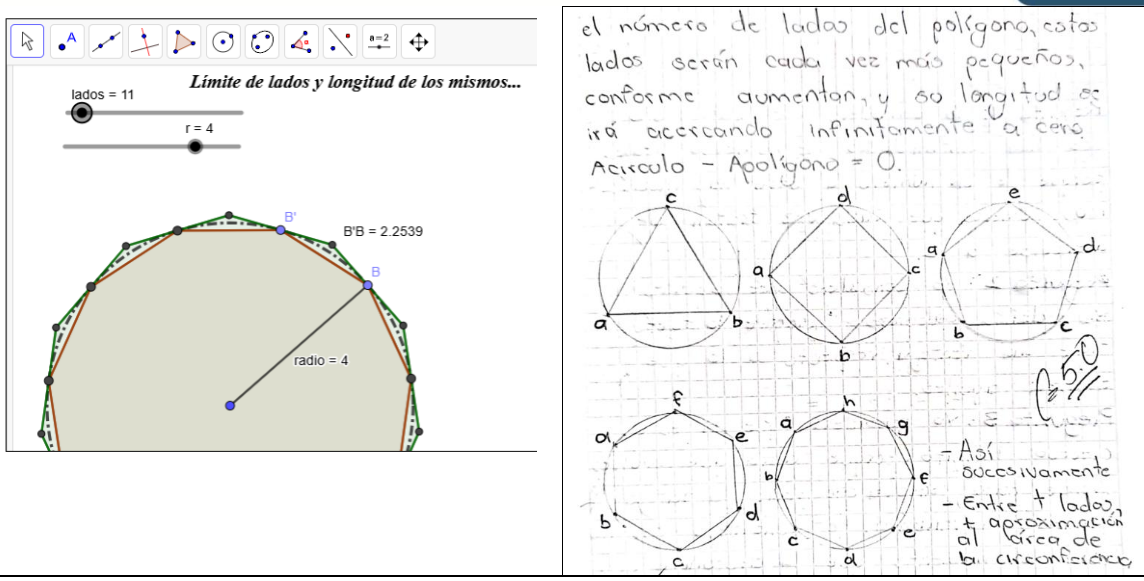
Exploración en el Applet, Grupo 2</td><td>
Cuando se intenta calcular el área de un círculo en base al área de polígonos regulares, se dice que los círculos tienen lados infinitos, independientemente del área que posean. Esto se debe a que, entre más lados tenga el polígono inscrito, el área de este tiende a acercarse más al área del círculo, sin embargo, siempre va a haber un margen de error, nunca llega a cubrir completamente el área de la circunferencia, a medida que aumentan los lados del polígono, el acercamiento se vuelve insignificante, no es gran cosa, aunque cada vez el error va a ser más pequeño. Al ir aumentando</td></tr>
</table>

https://doi.org/10.56219/lneaimaginaria.v3i22.4662

LÍNEA IMAGINARIA
REVISTA DE INVESTIGACIÓN EN ESTUDIOS SOCIALES Y DE FRONTERA

Número 22. Vol. 3 (2025), pp. 52- 96 / octubre - diciembre

ISSN en Línea: 2477-9415 / ISSN Impreso: 2477-9415
Depósito Legal: pp 200602TA2254



Fuente: Elaboración propia

Para este tercer problema, en el que se debe consolidar una primer idea de infinito (desde el número de lados para el polígono que optimice el proceso) y de tendencia a cero, para el valor de las longitudes de los infinitos lados que se deben generar, el grupo 1 hace un análisis apropiado pero con vacíos conceptuales como consecuencia de no poder manipular los deslizadores del applet que sí tienen a su disposición los estudiantes del segundo grupo, de ahí que, se muestren incluso ilustraciones tomadas del applet.

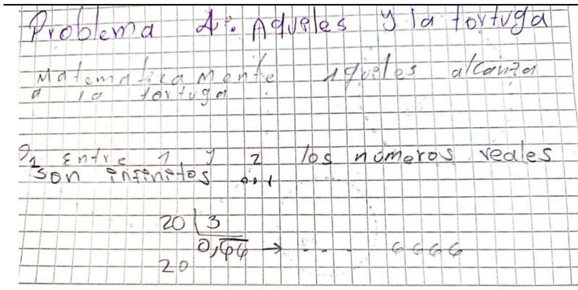
En la figura 7, se presentan algunas de las respuestas relacionadas con el problema 4, el cuál plantea a los estudiantes de ambos grupos la paradoja de Aquiles y la Tortuga con unas preguntas orientadoras sobre una idea más clara del infinito y de procesos infinitos que pueden, por medio de sumatoria de series, volverse finitos (https://www.geogebra.org/m/dx4qcc7n#material/rt4e3vm4).

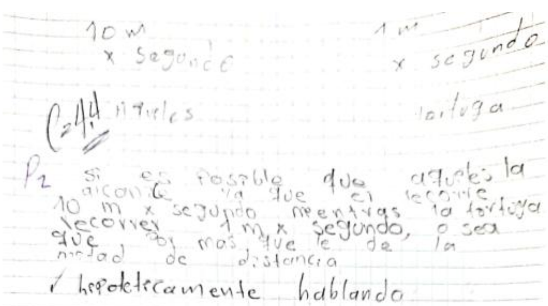
Figura 7. *Respuestas al problema: Aquiles y la tortuga.*

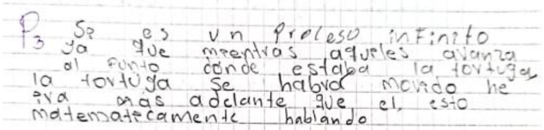
https://doi.org/10.56219/lneaimaginaria.v3i22.4662

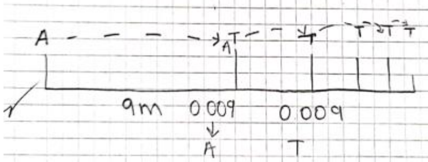
Grupo 1	Grupo 2

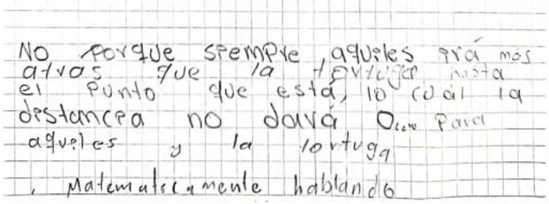
Grupo 1

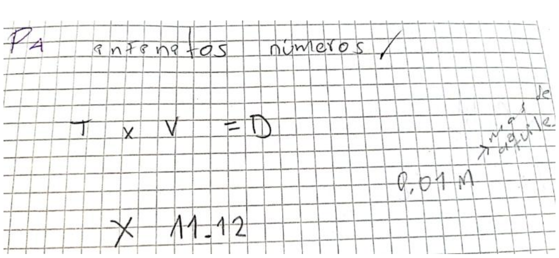

Problema 4: Aquiles y la tortuga
Matemáticamente Aquiles alcanza a la tortuga
P1 Entre 1 y 2 los números reales son infinitos
20 | 3
0,66 → ... 6666
20


10 m x segundo 1 m x segundo
C=Aquiles tortuga
P2 Si es posible que aquiles la alcance ya que el recorre 10 m x segundo mientras la tortuga recorre 1 m x segundo, o sea que va más que la mitad de distancia
hipotéticamente hablando

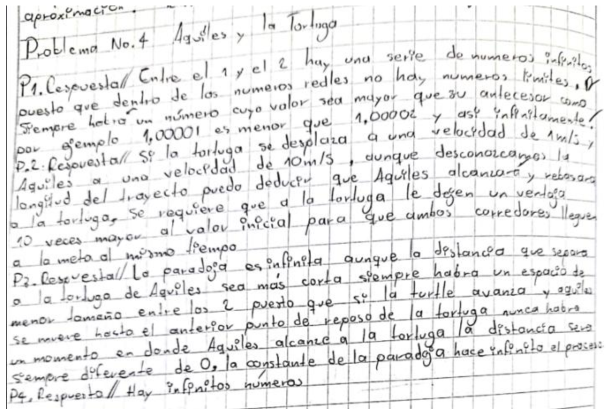

P3 Si es un proceso infinito ya que mientras aquiles avanza al punto donde estaba la tortuga, la tortuga se habrá movido he irá más adelante que el, esto matemáticamente hablando


A T T T
9m 0.009 0.009
A T

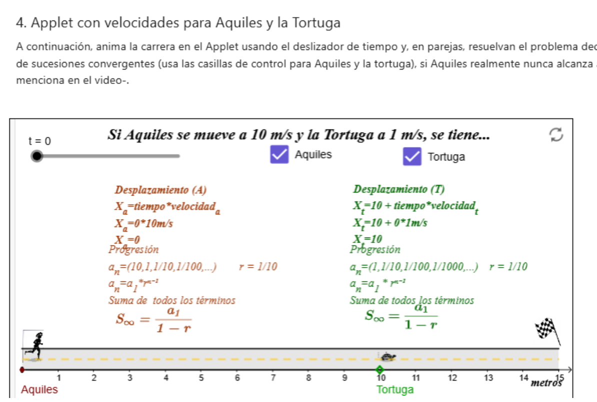

No porque siempre aquiles irá más atrás que la tortuga hasta el punto que está, lo cual la distancia no dará 0 para aquiles y la tortuga
Matemáticamente hablando


P4 infinitos números
T x V = D
0,01 M
X 11.12

Grupo 2


aproximación.
Problema No. 4 Aquiles y la Tortuga
entre el 1 y el 2 hay una serie de numeros infinitos
P1. Respuesta// Entre los numeros reales no hay numeros limites, puesto que dentro de los numeros cuyo valor sea mayor que su antecesor como siempre habrá un número 1,00002 y así infinitamente por ejemplo 1,00001 es menor que
P.2. Respuesta// Si la tortuga se desplaza a una velocidad de 1m/s y Aquiles a una velocidad de 10m/s, aunque desconozcamos la longitud del trayecto puedo deducir que Aquiles alcanzará y rebasará a la tortuga, se requiere que a la tortuga le dejen una ventaja 10 veces mayor al valor inicial para que ambos corredores lleguen a la meta al mismo tiempo
P3. Respuesta// La paradoja es infinita aunque la distancia que separa a la tortuga de Aquiles sea más corta siempre habrá un espacio de menor tamaño entre los 2 puesto que si la turtle avanza y aquiles se mueve hasta el anterior punto de reposo de la tortuga nunca habrá un momento en donde Aquiles alcanze a la tortuga la distancia será siempre diferente de 0, la constante de la paradoja hace infinito el proceso
P4. Respuesta// Hay infinitos números

Trabajo del applet



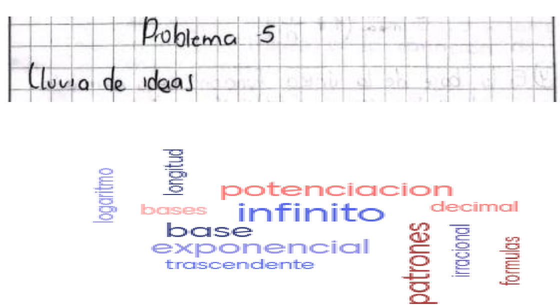
https://doi.org/10.56219/lneaimaginaria.v3i22.4662

LÍNEA IMAGINARIA
REVISTA DE INVESTIGACIÓN EN ESTUDIOS SOCIALES Y DE FRONTERA
Número 22. Vol. 3 (2025), pp. 52- 96 / octubre - diciembre
ISSN en Línea: 2477-9415 / ISSN Impreso: 2477-9415
Depósito Legal: pp 200602TA2254

Fuente: Elaboración propia

Frente a este cuarto problema, se evidencia una curiosidad y es que, en ambos grupos hubo una muy buena idea intuitiva de procesos infinitos, como el caso de Aquiles tratando de alcanzar a la tortuga, sin embargo, para el grupo 2, resultó más fácil sintetizar ideas sobre las preguntas orientadoras, la razón es que el applet dinamiza con gran amplitud la situación. En la figura 8 se muestra la comparación entre las respuestas del grupo 1 y 2 para la solución al problema 5, el cual se relaciona con el número de Euler y un primer acercamiento formal al concepto de límite desde el número en cuestión. Se aclara que, el grupo 2, tuvo dentro del link: https://www.geogebra.org/m/x2jh8dxu dos videos ilustrativos y el uso de la aplicación mentimeter para exponer sus ideas en relación al número. Mientras que el grupo 1, recibió la información de forma tradicional, es decir mediante clase magistral.

Figura 8. *Respuestas al problema 5: El número de Euler.*

<table>
<tr><th>Grupo 1</th><th>Grupo 2</th></tr>
<tr><td></td><td>
</td></tr>
</table>

https://doi.org/10.56219/lneaimaginaria.v3i22.4662

Problema 5

- lluvia de ideas

- El numero e es solo un número raro que alguien invento para complicar las matematicas no tiene mucho sentido buscar su origen. para encontrar el valor de e de la forma más rapida y sencilla simplemente tomo como 2.71 o 2.72 porque asi aparece en las calculadoras.

- lista de lo que se tiene y de lo que no

- lo que se tiene
  - Se sabe que le e aparece en los modelos matematicos de crecimiento y decaimiento
  - se relaciona con los algoritmos naturales y ecuaciones diferenciales

- lo que hace falta
  - como se define exactamente e
  - por qué es importante
  - una formula para calcula e que no dependa de series o intereses

- posible solución

el numero e se puede calcular con un serie y creo que la formula es asi:

$$e = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!}$$

estas expresiones deben darnos e porque son parecidas a otras formulas que he visto en clase como aparecen en exponenciales, cualquier cosa que tenga potencias y sumas factoriales deberian darnos e.

Lista de lo que se tiene y de lo que no

Para analizar el número e, primero reviso que información tengo y qué necesito buscar.

① Sabe que e, aparece en modelos matemáticos de crecimiento y decaimiento.

② Se relaciona con los logaritmos naturales y las ecuaciones diferenciales.

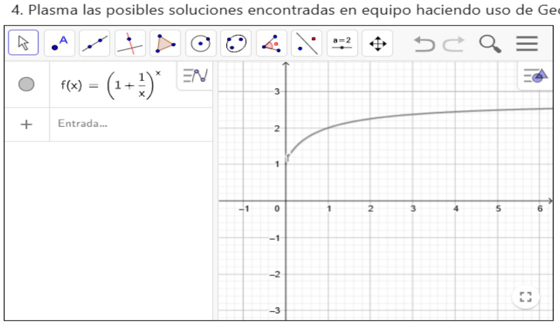
③ Existe una forma de encontrarlo usando límites como:

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Posible solución

Para entender el origen del número e, podemos pensar en cómo aparece naturalmente en situaciones de crecimiento continuo. Aunque no podemos usar intereses compuestos ni la serie de factoriales, si podemos analizarlo con límites. Una forma de definir

4. Plasma las posibles soluciones encontradas en equipo haciendo uso de Geogebra.



Este límite describe cómo algo crece cuando se actualizar constantemente en intervalos cada vez más pequeños. Es decir, si tomamos algo una cantidad y la aumentaramos repetidamente en proporciones muy pequeñas, el valor final tiende a e.

Fuente: Elaboración propia

De acuerdo a las respuestas mostradas, es notorio que, ambos grupos comprendieron en general la idea del número "e" como un valor peculiar y que, es necesario el cálculo matemático para llegar a él, no obstante, el grupo 2, mostró un

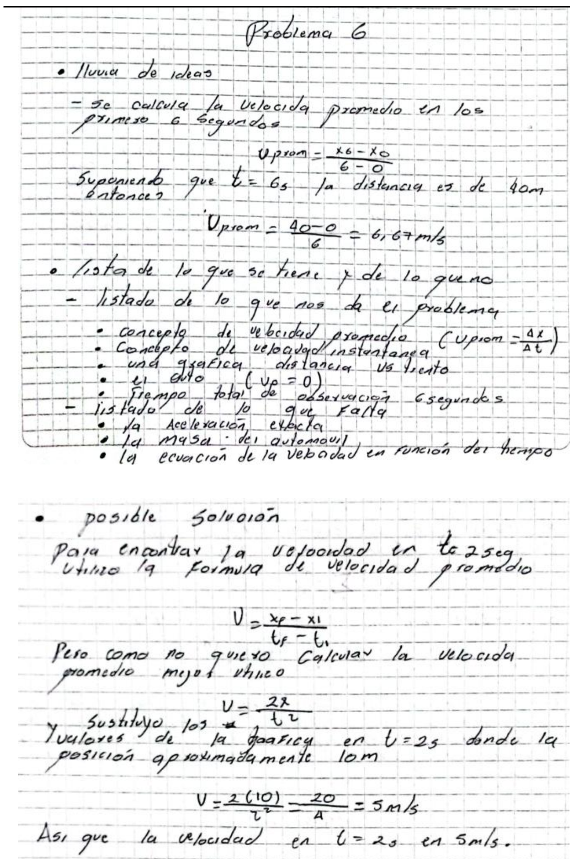
https://doi.org/10.56219/lneaimaginaria.v3i22.4662

LÍNEA IMAGINARIA
REVISTA DE INVESTIGACIÓN EN ESTUDIOS SOCIALES Y DE FRONTERA
Número 22. Vol. 3 (2025), pp. 52- 96 / octubre - diciembre
ISSN en Línea: 2477-9415 / ISSN Impreso: 2477-9415
Depósito Legal: pp 200602TA2254

mejor entendimiento del cómo llegar a dicho valor usando las funciones y el límite en una función particular. En la figura 9, se presenta un ejemplo de respuestas para el grupo 1 y 2, en el problema relacionado con velocidad instantánea (https://www.geogebra.org/m/dx4qcc7n#material/sqfnzumv). Para este sexto problema, se aborda el concepto de límite desde la física, de modo que, los estudiantes podrán interactuar con la noción de derivada desde la concepción de razón de cambio.

Figura 9. *Respuestas al problema 6: Velocidad instantánea.*

Grupo 1



Problema 6

• lluvia de ideas

- se calcula la velocida promedio en los primeso 6 segundos

$v_{prom} = \frac{x_6 - x_0}{6 - 0}$

Suponiendo que $t = 6s$ la distancia es de 40m entonces

$v_{prom} = \frac{40-0}{6} = 6,67 m/s$

• lista de lo que se tiene y de lo que no

- listado de lo que nos da el problema
  • concepto de velocidad promedio $(v_{prom} = \frac{\Delta x}{\Delta t})$
  • Concepto de velocidad instantanea
  • una grafica distancia vs tiempo
  • el auto $(v_0 = 0)$
  • tiempo total de observación 6 segundos
- listado de lo que falta
  • la Aceleración exacta
  • la masa del automovil
  • la ecuación de la velocidad en función del tiempo

• posible solución

Para encontrar la velocidad en t=2seg utilizo la formula de velocidad promedio

$v = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i}$

Pero como no quiero calcular la velocida promedio mejor utilizo

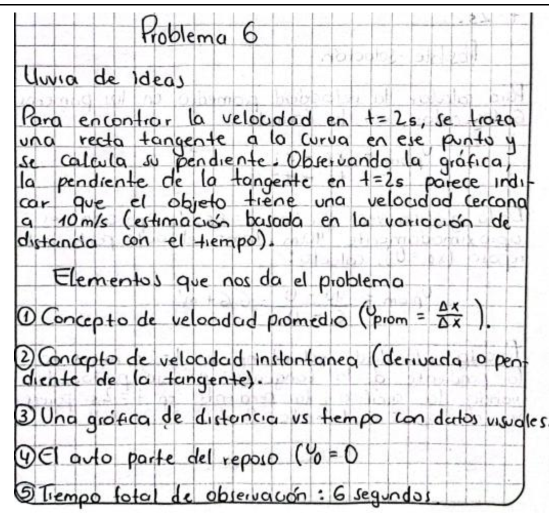
$v = \frac{2x}{t^2}$

Y sustituyo los valores de la grafica en t=2s donde la posición aproximadamente 10m

$v = \frac{2(10)}{2^2} = \frac{20}{4} = 5 m/s$

Así que la velocidad en t=2s en 5m/s.

Grupo 2



Problema 6

Lluvia de Ideas

Para encontrar la velocidad en t=2s, se traza una recta tangente a la curva en ese punto y se calcula su pendiente. Observando la gráfica, la pendiente de la tangente en t=2s parece indicar que el objeto tiene una velocidad cercana a 10 m/s (estimación basada en la variación de distancia con el tiempo).

Elementos que nos da el problema

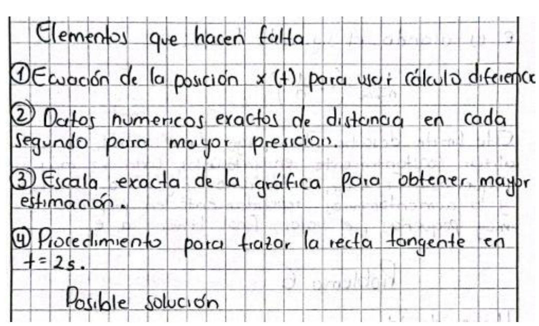
① Concepto de velocidad promedio $(v_{prom} = \frac{\Delta x}{\Delta x})$.

② Concepto de velocidad instantanea (derivada o pendiente de la tangente).

③ Una gráfica de distancia vs tiempo con datos visuales.

④ El auto parte del reposo $(v_0 = 0$

⑤ Tiempo total de observación : 6 segundos.



Elementos que hacen falta

① Ecuación de la posición x(t) para usar cálculo diferencial

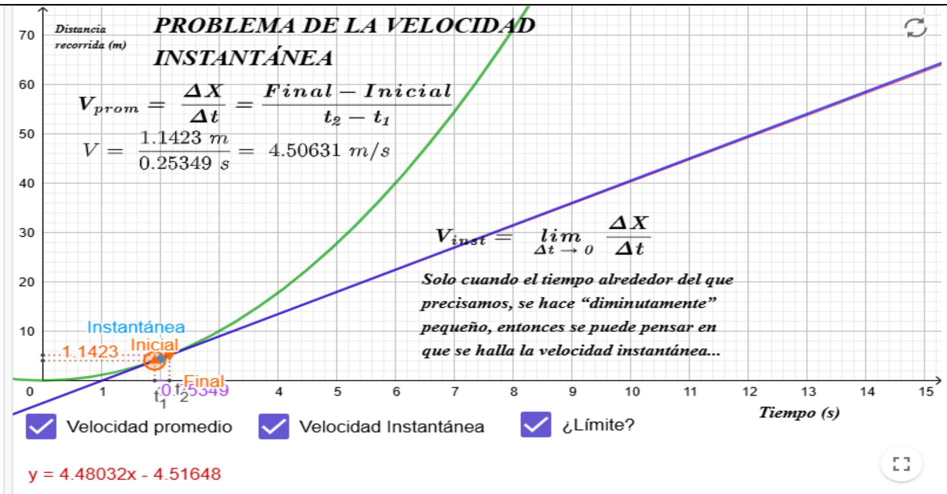
② Datos numericos exactos de distancia en cada segundo para mayor presición.

③ Escala exacta de la gráfica para obtener mayor estimación.

④ Procedimiento para trazar la recta tangente en t=2s.

Posible solución

https://doi.org/10.56219/lneaimaginaria.v3i22.4662



Fuente: Elaboración propia

Como se puede apreciar en los productos presentados por ambos grupos, se orienta a los estudiantes, con el caso de la velocidad instantánea, a pensar en valores de tiempo muy pequeños, además, en el grupo 2, se detecta la intuición de hallar la pendiente a una recta tangente a la curva de velocidad vs tiempo, para considerar la velocidad justo en ese punto. Luego, en la parte inferior, se hace un acercamiento mediante el applet. Pasando a la última sección de problemas, en la figura 11, se presentan los avances para el problema 7, el cual se visualiza en https://www.geogebra.org/m/dx4qcc7n#material/xng5aurb y esquematiza una primera situación en la que, el estudiante se familiariza con los elementos épsilon y delta de la definición formal de límite de una función.

Figura 10. *Respuestas al problema 7: Comportamiento de empresas.*

Grupo 1	Grupo 2

https://doi.org/10.56219/lneaimaginaria.v3i22.4662

LÍNEA IMAGINARIA
REVISTA DE INVESTIGACIÓN EN ESTUDIOS SOCIALES Y DE FRONTERA
Número 22. Vol. 3 (2025), pp. 52- 96 / octubre - diciembre
ISSN en Línea: 2477-9415 / ISSN Impreso: 2477-9415
Depósito Legal: pp 200602TA2254

Problema 7

- lluvia de ideas.

  - Para conocer el estado financiero antes de los 2 años, evaluo $F(2) = \frac{1}{2}(2)^2 - 3 = -5$ por lo que la empresa tenia 5 millones en perdidas, luego para los 4 años multiplicó la pendiente de la función lineal $g(2)$ por 4 y obtengo $g(4) = 18$ lo que indica que la empresa tenia 18 millones de euros. Finalmen el limite de ganancias es infinito porque la función $h(x)$ sigue creciendo, lo que significa que el inversionista puede ganar ilimitadamente si sigue invirtiendo

- lista de lo que se tiene y de lo que no
  - elementos que se encuentran en el problema
- Funciones definidas por intervalos
  - $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3$ para $0 \leq x < 2$
  - $g(x) = \frac{14}{3}x - \frac{14}{3}$ para $2 \leq x < 4$
  - $h(x) = (1 + \frac{1}{x})^x + \frac{7}{3}$ para $x \geq 4$
- la condición inicial de la empresa que empieza con un deficit de 3 millones de euros
- objetivo del problema: Determinar el estado financiero justo antes de los 2 y 4 años
  - elementos que hacen Falta
- Más ~~(ecuaciones)~~ datos sobre la perdidas
- valores exactos de las trasciones entre funciones
- Clarificación de los saltos en la grafica
- Posible Solución
  - Para encontrar el estado financiero antes de los 2 años se evalua la función cuadratica con $x = 2$

$$F(2) = \frac{1}{2}(2)^2 - 3 = 2 - 3 = -5$$

entonces antes de los dos años, la empresa tenia -5 millones de euros lo cual demuestra que va peor de lo esperado

Para los 4 años, la empresa como la función es lineal puede usarse la pendiente y multiplicarla por 4

$$g(4) = \frac{14}{3} \times 4 = \frac{56}{3} = 18$$

Asi que justo antes de los 4 años la empresa tenia 18 millones de euros

por lo que las ganancias parece infinito porque la función $h(x)$ sigue creciendo entonces el inversionista podria ganar dinero sin limite si sigue invirtiendo

Problema 7

Lluvia de ideas

Para conocer el estado financiero justo antes de los 2 años, uso la función cuadrática $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3$. Evaluando en $x = 2$, obtengo $f(2) = -1$, lo que indica que la empresa aún tenia pérdidas de 1 millon de euros. Para los 4 años, uso la funcion lineal $g(x) = \frac{14}{3}x - \frac{14}{3}$. Sustituyendo $x = 4$, obtengo $g(4) = 14$, lo que indica que la empresa ya tenia 14 millones de euros. Finalmente, para el límite de ganancias, analizo la función $h(x)$ que rige desde los 4 años en adelante. Como el término $\frac{1}{x}$ tiende a 0 cuando $x \to \infty$, la ganancia máxima parece estabilizarce en $\frac{7}{3}$ (aproximadamente 2.33 millones de euros).

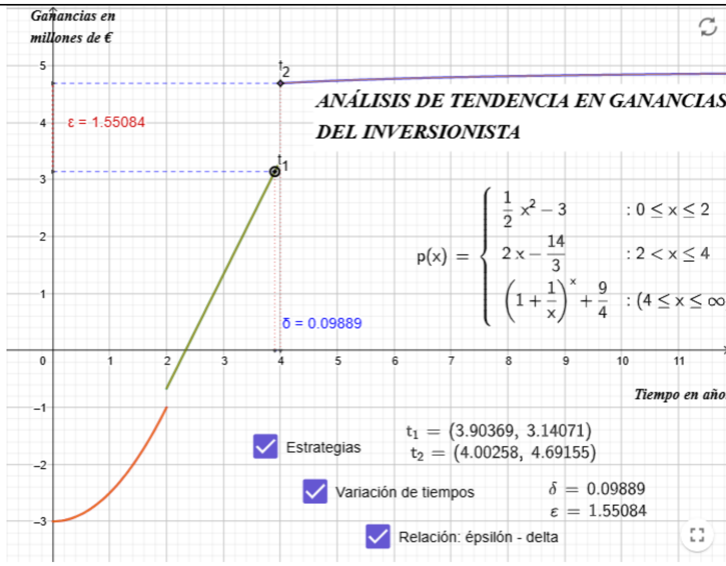
Elementos con los que se cuentan en el problema

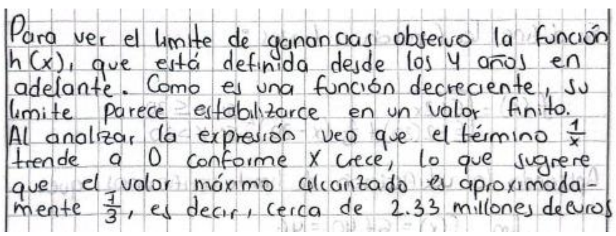
1. Funciones definidas por intervalos
   - $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3$ para $0 \leq x < 2$ (cuadrática).
   - $g(x) = \frac{14}{3}x - \frac{14}{3}$ para $2 \leq x < 4$ (lineal).
   - $h(x) = (1 + \frac{1}{x})^x + \frac{7}{3}$ para $x \geq 4$ (especial).
2. Condicion inicial: la empresa comienza con un deficit de 3 millones de euros.
3. Objetivo del problema: Determinar el estado financiero justo antes de los 2 y 4 años, interpretar los saltos en la gráfica y análizar el límite de ganancias.
4. Estructura de la gráfica: Tres secciones con diferentes tipos de crecimiento y cambios bruscos en las transiciones.

Elementos que hacen falta en el problema

1. Valores exactos de las transiciones entre funciones (por ejemplo, $f(2)$ y $g(4)$).
2. Explicación detallada de qué representa la función $h(x)$ en términos financieros.
3. Clarificación sobre los saltos en la gráfico: ¿Son eventos externos o cambios en la estrategia?
4. Restricciones adicionales en el dominio de $h(x)$ y su Limite cuando $x \to \infty$.

https://doi.org/10.56219/lneaimaginaria.v3i22.4662




Para ver el límite de ganancias observo la función h(x), que está definida desde los 4 años en adelante. Como es una función decreciente, su límite parece estabilizarce en un valor finito. Al analizar la expresión veo que el término $\frac{1}{x}$ tiende a 0 conforme x crece, lo que sugiere que el valor máximo alcanzado es aproximadamente $\frac{1}{3}$, es decir, cerca de 2.33 millones de euros.

Fuente: Elaboración propia

Como se evidencia en la anterior figura, el grupo 1, nuevamente hace uso de elementos matemáticos inherentes a la solución de la situación omitiendo la conceptualización detallada de la relación con el límite en los cambios de función. Por su parte, en el grupo 2, se interacciona con la situación con el applet que se muestra en la parte inferior y da respuestas que implican el uso del concepto en el problema.

Ahora, en el problema 8 (https://www.geogebra.org/m/dx4qcc7n#material/xzzvgjfz), se llega al propósito del Geogebrabook, puesto que, se establece la definición formal de límite y se dinamiza en

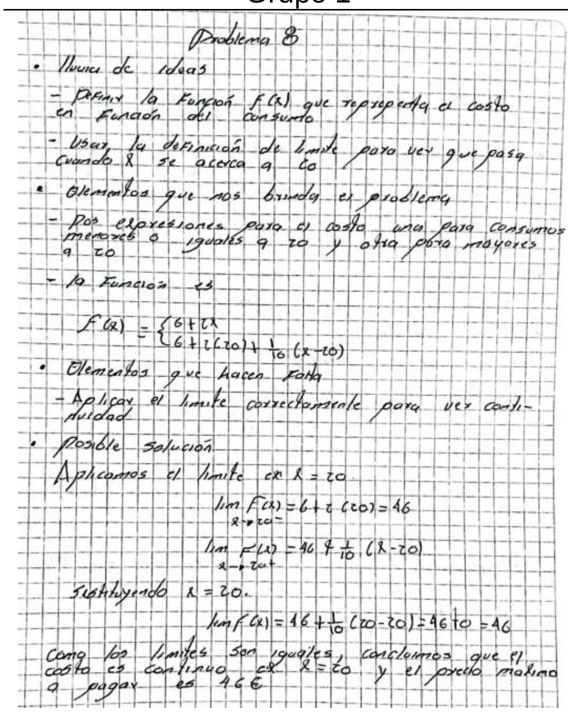
https://doi.org/10.56219/lneaimaginaria.v3i22.4662

LÍNEA IMAGINARIA
REVISTA DE INVESTIGACIÓN EN ESTUDIOS SOCIALES Y DE FRONTERA
Número 22. Vol. 3 (2025), pp. 52- 96 / octubre - diciembre
ISSN en Línea: 2477-9415 / ISSN Impreso: 2477-9415
Depósito Legal: pp 200602TA2254

el applet, considerando el intervalo épsilon y delta alrededor de "a" y "L" respectivamente, dentro de un contexto cotidiano como es el de la tarifa del agua de acuerdo a su consumo en metros cúbicos. La figura 11 ilustra las respuestas de los estudiantes frente al planteamiento respectivo.

Figura 11. *Respuestas al problema 8: Formalidad del límite.*

Grupo 1



Problema 8

- Lluvia de ideas
  - Definir la función $f(x)$ que representa el costo en función del consumo
  - Usar la definición de límite para ver que pasa cuando x se acerca a 20
- Elementos que nos brinda el problema
  - Dos expresiones para el costo una para consumos menores o iguales a 20 y otra para mayores a 20
  - la función es

$$f(x) = \begin{cases} 6+2x \\ 6+2(20)+\frac{1}{10}(x-20) \end{cases}$$

- Elementos que hacen falta
  - Aplicar el límite correctamente para ver continuidad
- Posible solución

Aplicamos el límite en $x = 20$

$$\lim_{x \to 20^-} f(x) = 6+2(20) = 46$$

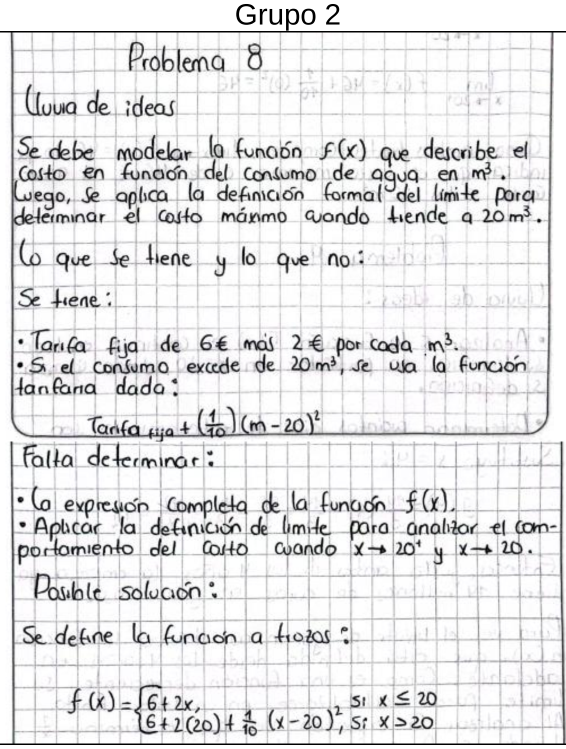
$$\lim_{x \to 20^+} f(x) = 46 + \frac{1}{10}(x-20)$$

Sustituyendo $x = 20$.

$$\lim f(x) = 46 + \frac{1}{10}(20-20) = 46+0 = 46$$

Como los límites son iguales, concluimos que el costo es continuo en $x = 20$ y el precio máximo a pagar es 46 €

Grupo 2



Problema 8

Lluvia de ideas

Se debe modelar la función $f(x)$ que describe el costo en función del consumo de agua en m^3. Luego, se aplica la definición formal del límite para determinar el costo máximo cuando tiende a $20\,m^3$.

Lo que se tiene y lo que no:

Se tiene:

- Tarifa fija de 6€ más 2 € por cada m^3.
- Si el consumo excede de $20\,m^3$, se usa la función tarifaria dada:

$$\text{Tarifa}_{\text{fija}} + \left(\frac{1}{10}\right)(m-20)^2$$

Falta determinar:

- La expresión completa de la función $f(x)$.
- Aplicar la definición de límite para analizar el comportamiento del costo cuando $x \to 20^+$ y $x \to 20$.

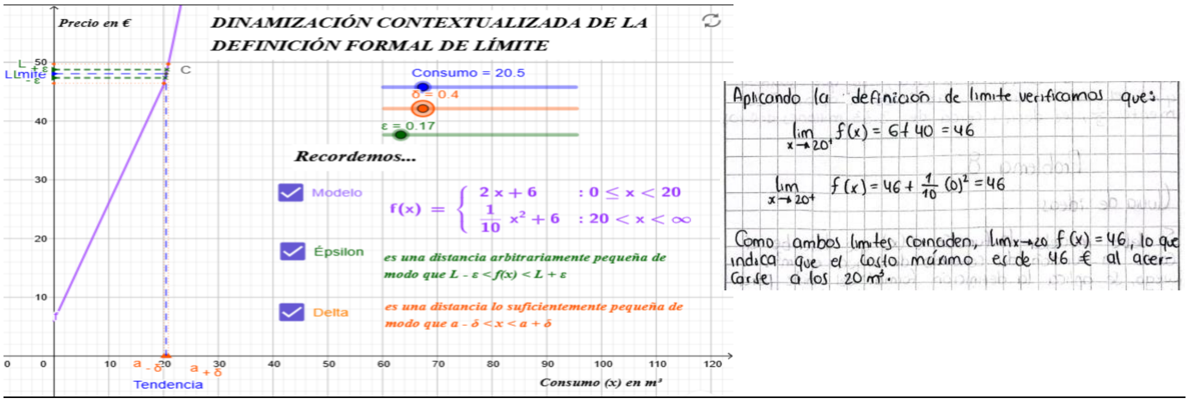
Posible solución:

Se define la función a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} 6+2x, & \text{si } x \leq 20 \\ 6+2(20)+\frac{1}{10}(x-20)^2, & \text{si } x > 20 \end{cases}$$

https://doi.org/10.56219/lneaimaginaria.v3i22.4662

Autores:
Manuel Antonio Hoyos Garcia/ *Eduar Ramiro Burbano Semanate*



Fuente: Elaboración propia

Como se muestra en las respuestas de los dos grupos, para el problema 8, es notorio que la parte procedimental, relacionada con el límite de funciones, logró comprenderse, puesto que, los procesos y razonamientos son apropiados. No obstante, para el grupo 2, se destaca el abordaje inicial del problema, con lo que se satisface el objetivo general de propiciar la comprensión conceptual del tópico. Por último, en la figura 12, se presentan las respuestas con relación al último de los problemas, para este (https://www.geogebra.org/m/dx4qcc7n#material/xshpkjys) se propone a los estudiantes una aplicación del concepto de límite como elemento de finalización para valorar su comprensión frente al tópico en cuestión.

Figura 12. *Respuestas al problema 8: Aplicación del concepto.*

Grupo 1	Grupo 2

https://doi.org/10.56219/lneaimaginaria.v3i22.4662

LÍNEA IMAGINARIA
REVISTA DE INVESTIGACIÓN EN ESTUDIOS SOCIALES Y DE FRONTERA

Número 22. Vol. 3 (2025), pp. 52- 96 / octubre - diciembre

ISSN en Línea: 2477-9415 / ISSN Impreso: 2477-9415
Depósito Legal: pp 200602TA2254

Problema 9

- lluvia de ideas
  - Verificar si $T(x)$ es continua en $x = 30$
  - Determinar el valor de x para que $T(x) < 2$.
- Elementos que nos brinda el problema
  - Dos expresiones de la Función $T(x)$, una para $0 \leq x < 30$ y otra para x $x > 30$
  - se quiere ver la Función es continua y cuántos días son necesarios para $T(x) < 2$
- Elementos que hacen Falta
  - Calcular los límites laterales correctamente
- Posible solución

a) Verificar Continuidad

límite por la izquierda:

$$\lim T(x) = \frac{300}{x+30} = \frac{300}{60} = 5$$

límite por la derecha

$$\lim T(x) = \frac{1125}{(30-5)(30-15)} + 2 = \frac{1125}{25 \times 15} + 2 = \frac{1125}{375} + 2 = 3 + 2 = 5$$

la Función es continua en $x = 30$

b) encontrar el numero el número de días para $T(x) < 2$

Planteamos la desigualdad

$$\frac{1125}{(x-5(x-15)} + 2 < 2$$

Resaltando 2 en ambos lados

$$\frac{1125}{(x-5)(x-15)} < 2$$

Calculando el valor de x

$$\frac{1125}{(x-5(x-15)} = 2$$

Resolviendo se obtiene $x = 25$ por lo que con 25 días de entrenamiento el tiempo de la prueba es menor a 2 minutos.

Problema 9

Lluvia de ideas:

- Analizar si la función $T(x)$ es continua en todo su dominio, en particular en $x = 30$, donde cambia su definición.
- Determinar cuántos días de entrenamiento son necesarios para que el tiempo de la prueba sea menor a 2 minutos (es decir, $T(x) < 2$).

Lo que se tiene y lo que no:

Se tiene:

- Dos expresiones para la función $T(x)$, una válida para $0 \leq x < 30$ y otra para $x > 30$.
- Se requiere verificar la continuidad en $x = 30$, es decir, si $\lim_{x \to 30^-} T(x) = \lim_{x \to 30^+} T(x) = T(30)$.
- Se debe resolver $T(x) < 2$ para encontrar el número mínimo de días de entrenamiento.

Falta determinar:

- El valor de $\lim_{x \to 30^-} T(x)$ y $\lim_{x \to 30^+} T(x)$.
- Resolver la ecuación $T(x) < 2$ para encontrar lo valores de x que cumplen la condición.

Posible solución:

a) Verificar continuidad

- Calculamos el límite por la izquierda:

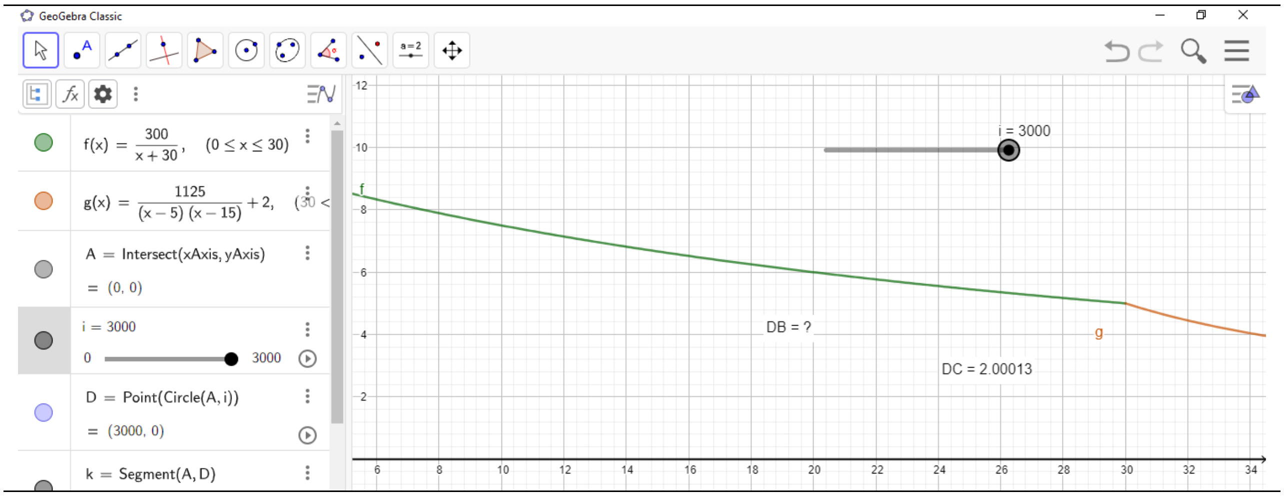
$$\lim_{x \to 30^-} T(x) = \frac{300}{30+30} = \frac{300}{60} = 5$$

- Calculamos el límite por la derecha usando la segunda función:

$$\lim_{x \to 30^+} T(x) = \frac{1125}{(30-5)(30-15)} + 2 = \frac{1125}{25 \times 15} + 2 = \frac{1125}{375} + 2 = 3 + 2 = 5$$

- Como ambos límites son iguales y coinciden con el valor de la función en $x = 30$, la función es continua en todo su dominio.

https://doi.org/10.56219/lneaimaginaria.v3i22.4662



Fuente: Elaboración propia

Con relación a la puesta en práctica del concepto de límite de una función, en este último problemas se evidencian aspectos muy interesantes que nutren y validan el desarrollo de los nueve problemas en estudiantes de grado undécimo, de este modo, en la anterior figura se deja un referente de cómo los estudiantes de un primer grupo, usan procesos matemáticos que desconocen la relevancia de instrumentos como geogebra para dinamizar y visualizar mejor la situación, de ese modo solucionan el problema erradamente y por otro lado los estudiantes del segundo grupo, los cuales inician con un análisis similar pero un tanto más estructurado en comparación con el grupo 1, dan muestra de la utilidad de la herramienta, de la concepción del límite como una aproximación óptima y plasman su conclusión usando el programa para dejar en claro que, por más que se entrene, en el contexto del ejercicio, no se logra reducir el tiempo a 2 minutos, ello se evidencia a poner un valor de 3000 en el deslizador y notar

https://doi.org/10.56219/lneaimaginaria.v3i22.4662

LÍNEA IMAGINARIA
REVISTA DE INVESTIGACIÓN EN ESTUDIOS SOCIALES Y DE FRONTERA
Número 22. Vol. 3 (2025), pp. 52- 96 / octubre - diciembre
ISSN en Línea: 2477-9415 / ISSN Impreso: 2477-9415
Depósito Legal: pp 200602TA2254

que la función de tiempo da 2,00013 minutos.

Con respecto a la valoración de los problemas, en las tablas 4 a 6 se resumen los resultados en cuanto alcance de nivel de desempeño de los estudiantes de ambos grupos en los problemas 3,6 y 9. Se toman estos 3 como evidencia en el presente artículo, por ser los problemas de cierre de cada sección desde las tres perspectivas trabajadas; así, se establece la validación de desempeños de ambos grupos conforme a los niveles de las rúbricas los cuales se plantean de cara al propósito de comprensión en cada grupo de tres problemas que marcan el avance dentro del objetivo general de ir promoviendo la comprensión del límite de funciones incorporando el software Geogebra como herramienta didáctica.

Tabla 4. Rúbrica evaluativa: ¿Segmentos infinitamente pequeños?

Indicadores y criterios de evaluación	**Nivel 1 Superior**	**Nivel 2 Alto**	**Nivel 3 Básico**	**Nivel 4 Bajo**	**Nivel**	**Puntuación**
	4.5 - 5	**3.9 - 4.4**	**3 - 3.8**	**1 - 2.9**		
Plantea interrogantes e hipótesis sobre el límite de áreas mediante el uso de Geogebra[4].	Muestra habilidad para plantear interrogantes e hipótesis sobre el límite de áreas mediante el uso de Geogebra	Plantea interrogantes e hipótesis sobre el límite de áreas mediante el uso de Geogebra	Con algunas dificultades, plantea interrogantes e hipótesis sobre el límite de áreas mediante el uso de Geogebra	Presenta dificultades notables para plantear interrogantes e hipótesis sobre el límite de áreas mediante el uso de Geogebra		
Grupo 1					A	
Grupo	X					

4 Se aclara que, para el grupo que no usó el software, este criterio se omite.

https://doi.org/10.56219/lneaimaginaria.v3i22.4662

2						.5
Soluciona problemas sobre límite de funciones de forma individual y cooperativa.	Es hábil para solucionar problemas sobre límite de funciones de forma individual y cooperativa	Soluciona problemas sobre límite de funciones de forma individual y cooperativa	Con algunas dificultades, soluciona problemas sobre límite de funciones de forma individual y cooperativa	No logra solucionar problemas sobre límite de funciones de forma individual ni cooperativa		
Grupo 1			X			.5
Grupo 2		X				
Emplea responsablemente recursos tecnológicos para evaluar su propio aprendizaje.	De manera ejemplar, emplea responsablemente recursos tecnológicos para evaluar su propio aprendizaje	Emplea responsablemente recursos tecnológicos para evaluar su propio aprendizaje	Algunas veces emplea responsablemente recursos tecnológicos para evaluar su propio aprendizaje	No emplea responsablemente recursos tecnológicos para evaluar su propio aprendizaje		
Grupo 1	X					
		Total				**.2**
Grupo 2	X					
		Total				**.8**

Fuente: Elaboración propia

Con base a las evidencias presentadas por los estudiantes y, en general, desde la observación directa, se tiene que, como se muestra en la tabla 4, los estudiantes del grupo 1 alcanzan un nivel alto para el tercer problema, el cual sintetiza la noción de limite desde una perspectiva geométrica, aun así, se manifiesta dificultades para concebir el concepto de infinito, comparados con el grupo 2, quienes por su parte,

https://doi.org/10.56219/lneaimaginaria.v3i22.4662

LÍNEA IMAGINARIA
REVISTA DE INVESTIGACIÓN EN ESTUDIOS SOCIALES Y DE FRONTERA

Número 22. Vol. 3 (2025), pp. 52- 96 / octubre - diciembre
ISSN en Línea: 2477-9415 / ISSN Impreso: 2477-9415
Depósito Legal: pp 200602TA2254

muestran una mejora notable en comparación, llegando al nivel 1: superior y abstrayendo concepciones más allá de la mera imaginación subjetiva, puesto que, pudieron manipular la noción del infinito mediante la transformación de los polígonos estructurados en los applets.

Tabla 5. Rúbrica evaluativa: Velocidad instantánea

Indicadores y criterios de evaluación	**Nivel 1 Superior**	**Nivel 2 Alto**	**Nivel 3 Básico**	**Nivel 4 Bajo**	**Nivel**	**Puntuación**
	4.5 - 5	**3.9 - 4.4**	**3 - 3.8**	**1 - 2.9**		
Plantea interrogantes e hipótesis sobre el límite de velocidades mediante el uso de Geogebra.	Muestra habilidad para plantear interrogantes e hipótesis sobre el límite de velocidades mediante el uso de Geogebra	Plantea interrogantes e hipótesis sobre el límite de velocidades mediante el uso de Geogebra	Con algunas dificultades, plantea interrogantes e hipótesis sobre el límite de velocidades mediante el uso de Geogebra	Presenta dificultades notables para plantear interrogantes e hipótesis sobre el límite de velocidades mediante el uso de Geogebra		
Grupo 1					A	
Grupo 2		X				
Soluciona problemas sobre límite de funciones de forma individual y	Es hábil para solucionar problemas sobre límite de funciones de forma individual	Soluciona problemas sobre límite de funciones de forma individual y cooperativa	Con algunas dificultades, soluciona problemas sobre límite de funciones de forma individual y	No logra solucionar problemas sobre límite de funciones de forma individual		

https://doi.org/10.56219/lneaimaginaria.v3i22.4662

cooperativa.	y cooperativa		cooperativa	ni cooperativa	
Grupo 1			X		.6
Grupo 2		X			.2
Emplea responsablemente recursos tecnológicos para evaluar su propio aprendizaje.	De manera ejemplar, emplea responsablemente recursos tecnológicos para evaluar su propio aprendizaje	Emplea responsablemente recursos tecnológicos para evaluar su propio aprendizaje	Algunas veces emplea responsablemente recursos tecnológicos para evaluar su propio aprendizaje	No emplea responsablemente recursos tecnológicos para evaluar su propio aprendizaje	
Grupo 1	X				
		Total			**.3**
Grupo 2	X				
		Total			**.4**

Fuente: Elaboración propia

Para esta segunda sección de problemas, que se cierra con el problema de la velocidad instantánea propuesto para la perspectiva algebraica – aritmética, en la tabla 5 se evidencia en los grupos, de acuerdo a la rúbrica evaluativa y evidencias de aprendizaje, un aumento en la confusión respecto a la comprensión del concepto *per se*, no obstante, considerando la complejidad de los tres problemas propuestos, en el grupo 2, gracias al applet usado para el grupo de los tres problemas, se logra una mejor asimilación de lo que se entendería después como la recta tangente a la curva

https://doi.org/10.56219/lneaimaginaria.v3i22.4662

LÍNEA IMAGINARIA
REVISTA DE INVESTIGACIÓN EN ESTUDIOS SOCIALES Y DE FRONTERA
Número 22. Vol. 3 (2025), pp. 52- 96 / octubre - diciembre
ISSN en Línea: 2477-9415 / ISSN Impreso: 2477-9415
Depósito Legal: pp 200602TA2254

de distancia vs tiempo. Al final, debe mencionarse, como lo ilustra la tabla, que ambos grupos llegan a un nivel 2: alto.

Tabla 6. Rúbrica evaluativa: Aplicación del concepto

Indicadores y criterios de evaluación	**Nivel 1 Superior**	**Nivel 2 Alto**	**Nivel 3 Básico**	**Nivel 4 Bajo**	**Nivel**	**Puntuación**
	4.5 - 5	**3.9 - 4.4**	**3 - 3.8**	**1 - 2.9**		
Plantea interrogantes e hipótesis sobre el concepto de límite de una función mediante el uso de Geogebra.	Muestra habilidad para plantear interrogantes e hipótesis sobre el concepto de límite de una función mediante el uso de Geogebra	Plantea interrogantes e hipótesis sobre el concepto de límite de una función mediante el uso de Geogebra	Con algunas dificultades, plantea interrogantes e hipótesis sobre el concepto de límite de una función mediante el uso de Geogebra	Presenta dificultades notables para plantear interrogantes e hipótesis sobre el concepto de límite de una función mediante el uso de Geogebra		
Grupo 1					A	
Grupo 2	X					.5
Soluciona problemas sobre límite de funciones de forma individual y cooperativa.	Es hábil para solucionar problemas sobre límite de funciones de forma individual y cooperativa	Soluciona problemas sobre límite de funciones de forma individual y cooperativa	Con algunas dificultades, soluciona problemas sobre límite de funciones de forma individual y cooperativa	No logra solucionar problemas sobre límite de funciones de forma individual ni cooperativa		
Grupo 1			X			.3
Grupo 2	X					.6
Emplea responsablemente recursos tecnológicos para evaluar su propio aprendizaje.	De manera ejemplar, emplea responsablemente recursos tecnológicos para evaluar su propio aprendizaje	Emplea responsablemente recursos tecnológicos para evaluar su propio aprendizaje	Algunas veces emplea responsablemente recursos tecnológicos para evaluar su propio aprendizaje	No emplea responsablemente recursos tecnológicos para evaluar su propio aprendizaje		

https://doi.org/10.56219/lneaimaginaria.v3i22.4662

Grupo 1	X		
		Total	**.1**
Grupo 2	X		
		Total	**.7**

Fuente: Elaboración propia

Para éste último problema que busca la puesta en práctica de las nociones interiorizadas en los problemas previos, se deja en evidencia, de acuerdo a la tabla 6, la dificultad inherente a su comprensión por parte del grupo 1 y, en el grupo 2, en medio de la complejidad propia del concepto, se puede resaltar que el uso del software y los applet para dinamizar situaciones, potenció la posibilidad de analizar más detalladamente funciones y tendencias; así, es de anotar que los desempeños de este segundo grupo mejoraron con el uso de la herramienta didáctica y trajeron como repercusión benéfica, el entendimiento inicial y comprensión fianl de este estructurado concepto.

https://doi.org/10.56219/lneaimaginaria.v3i22.4662

Número 22. Vol. 3 (2025), pp. 52- 96 / octubre - diciembre
ISSN en Línea: 2477-9415 / ISSN Impreso: 2477-9415
Depósito Legal: pp 200602TA2254

Conclusiones

Con relación al primero de los objetivos, en el presente artículo luego de un análisis de trabajos en los que se aplican y estudian distintos software para el trabajo matemático como Maple, Derive y Cabri Geometry se destaca el uso del software Geogebra en comparación con sus homólogos, debido principalmente a su carácter libre, a sus bondades en el interfaz que permiten su uso de manera intuitiva y, además, por su versatilidad, ya que, sus funciones no se limitan al uso de la aplicación, sino que, se cuenta con el recurso desde su website. En adición, el software sobresale por ser compatible con la creación de estrategias pedagógicas avanzadas como es el caso del Geogebrabook con la incorporación de applets que pueden manipularse desde cualquier dispositivo electrónico con acceso a internet.

Por otro lado, desde la consideración de la fenomenología y a través de un examen crítico de los desafíos epistemológicos inherentes a la noción matemática de límite de funciones, emergen tres elementos clave para la labor docente, a saber, 1. reconocer la

https://doi.org/10.56219/lneaimaginaria.v3i22.4662

naturaleza multifacética de estos conceptos y su complejidad inherente, 2. abordar las barreras estrictamente relacionadas con los enfoques pedagógicos tradicionales, y 3. responder a la diversidad cognitiva y contextual de los estudiantes en el aula. Esta tríada justifica la necesidad de desarrollo de marcos de enseñanza innovadores. Así, presentar los conceptos como entidades estáticas divorciadas de su génesis histórica y procesos de estructuración conceptual, crea obstáculos epistemológicos que dificultan una comprensión significativa. Por lo tanto, se promueve un enfoque diacrónico que incorpore: análisis histórico-epistemológico, y fenomenología del concepto, como fundamento para el diseño de secuencias didácticas mejor fundamentadas.

Consecuentemente, la construcción del concepto de límite de una función estriba, para el presente trabajo, desde 3 perspectivas claras [geométrica, algebraica, aritmética y analítica], que recogen hitos como el método de exhaución, la noción de infinito, la velocidad instantánea y, por último, la definición conceptual. También, con el propósito de diseñar y aplicar una propuesta que permita la comprensión del concepto, el presente artículo enfatiza la relevancia de la incorporación de herramientas TIC, particularmente Geogebra, en la elaboración de propuestas didácticas orientadas a la aprehensión del concepto de límite de funciones.

Lo anterior debido a la capacidad del software para dinamizar objetos matemáticos a través de la manipulación interactiva que ofrece esta y otras herramientas; con ello, se permite trascender su abstracción intrínseca, promoviendo así su asimilación y aplicabilidad en variados contextos. Dicha estrategia pedagógica contrasta de forma

https://doi.org/10.56219/lneaimaginaria.v3i22.4662

LÍNEA IMAGINARIA
REVISTA DE INVESTIGACIÓN EN ESTUDIOS SOCIALES Y DE FRONTERA
Número 22. Vol. 3 (2025), pp. 52- 96 / octubre - diciembre
ISSN en Línea: 2477-9415 / ISSN Impreso: 2477-9415
Depósito Legal: pp 200602TA2254

precisa con los métodos convencionales de enseñanza, ilustrados en el Grupo 1 del estudio, cuyo uso se limitó al tablero y el marcador, los cuales demostraron generar restricciones en la construcción de nociones matemáticas necesarias en el logro de una comprensión conceptual significativa sobre el límite de una función.

Por último, se logra una mejor disposición por parte de los estudiantes para llevar a cabo actividades curriculares relacionadas con un tópico abstracto y trascendente para el estudio del análisis matemático. De esta manera, se promueve la comprensión, mediante la reflexión y manipulación de elementos inherentes a cada problema y encaminados a la construcción del concepto, partiendo desde la intuición hasta llegar a la formalidad del mismo y, conforme al análisis de los desempeños de los dos grupos de estudio, se establece que, la propuesta, no solo permitió mejorar procesos de enseñanza – aprendizaje, sino que, además, se cumplió con el propósito esencial que fue promover la comprensión del concepto.

https://doi.org/10.56219/lneaimaginaria.v3i22.4662

Referencias

Alzate, E., Montes, J., Escobar. R., (2013). Diseño de actividades mediante la metodología ABP para la Enseñanza de la Matemática. *Scientia et Technica* Año XVIII, Vol. 18, No. 3, pp. 542-547. https://doi.org/10.22517/23447214.8341

Barallobres, G. (2017). Ciertos fenómenos didácticos que caracterizan las dificultades de aprendizaje en la transición de la aritmética al álgebra en la escuela secundaria. *Unión-Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 13(51). https://revistaunion.org.fespm.es/index.php/UNION/article/-view/384

Bejarano, M., Lirio, J., Martínez, A., Manzanares, A., Palomares, Mª., Rodriguez, L. y Villa, N. (2015). *El aprendizaje basado en problemas, una propuesta metodológica en educación superior.* Narcea ediciones. https://n9.cl/w48f

Bernal, C. A. (2006). Metodología de la investigación. Pearson educación. http://up-rid2.up.ac.pa:8080/xmlui/handle/123456789/1485

Blázquez, S. y Ortega, T. (2001). Los sistemas de representación en la enseñanza del límite. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, Vol 4, Núm, 3.* Pp. 219-236. https://documat.unirioja.es/descarga/articulo/2147876.pdf

Blázquez, S. y Ortega, T. (2002). Nueva definición de límite funcional. *UNO, 30*, pp. 67-82. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=260158

Bressan, A., Zolkower, B. y Gallego, F. (2004). *La educación matemática realista*. Principios en que se sustenta. Escuela de invierno en didáctica de la matemática. http://www.gpdmatematica.org.ar/publicaciones/articulo_escuela_invierno2.pdf

Brousseau, G. (1989). Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques. *Construction des savoirs, obstacles et conflits*, 41-63. https://hal.science/hal-00516581/

Cruz, M. (2006): *La enseñanza de la Matemática a través de la Resolución de Problemas*. Tomo 1 La Habana: Educación Cubana

D'Amore, B. & Zan, R. (1996) Italian research on problem solving 1988–1995. In A. Gagatsis & L. Rogers (Eds.): Didactic and History of Mathematics (p. 39). Thessaloniki

Freudenthal, H. (1983). Didactical phenomenology of mathematical structures [Electronic resource]. https://www.sidalc.net/search/Record/KOHA-OAI-TEST:212553/Description

Gutiérrez-Gonzalez, J., Morales-Maure, L., Campos-Nava, M., Crespo, J. y Mansilla-Sepúlveda, J. (2019). Visualizando los límites de funciones y las derivadas con geometría dinámica. *Opción*, Año 35, Regular No.90, pp. 607-667.

https://doi.org/10.56219/lneaimaginaria.v3i22.4662

LÍNEA IMAGINARIA
REVISTA DE INVESTIGACIÓN EN ESTUDIOS SOCIALES Y DE FRONTERA
Número 22. Vol. 3 (2025), pp. 52- 96 / octubre - diciembre
ISSN en Línea: 2477-9415 / ISSN Impreso: 2477-9415
Depósito Legal: pp 200602TA2254

Hidalgo, H., Mera, E., López, J. y Patiño, L. (2015). Aprendizaje basado en problemas como potencializador del pensamiento matemático. *Plumilla Educativa*, Vol. 15, Nº. 1. pp. 299-312. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=5920332

Leiva, F. (2016). ABP como estrategia para desarrollar el pensamiento lógico matemático en alumnos de educación secundaria. *Sophia: Colección de Filosofía de la Educación*, Nº. 21. pp. 209-224. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=5973046

Mora, O. (2012). Diseño de herramientas didácticas en ambientes virtuales de aprendizaje mediante unidades de aprendizaje integrado en matemáticas. Tesis (Maestría)

Morales, P. y Landa, V. (2004). APRENDIZAJE BASADO EN PROBLEMAS. *Theoria*, Vol. 13., pp. 145-157. http://biblioteca.udgvirtual.udg.mx/jspui/handle/123456789/574

Pons, J. (2014). *Análisis de la comprensión en estudiantes de bachillerato del concepto de Límite de una función en un punto* [Tesis Doctoral, Universidad de Alicante]. Archivo digital. https://rua.ua.es/dspace/bitstream/10045/45713/1/tesis_pons_tomas.pdf

Posso, A., Uzuriaga, V. y Del Carmen, J. (2007). Dificultades que aparecen en el proceso enseñanza-aprendizaje de la matemática al pasar del bachillerato a la universidad. *Scientia et Technica*, Vol. 2 Núm. 34. Pp. 495-499. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=4810869

Rendón Mayorga, C. G. (2017). *Diseño de tareas mediadas por la historia del concepto de límite dirigidas a la formación del profesor de Matemáticas*. [Tesis de Maestría], Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia. http://repository.pedagogica.edu.co/handle/20.500.12209/9457

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En Rico, L., Castro, E., Coriat, M., Puig, L., Sierra, M. y Socas, M. (Eds.). La educación matemática en la enseñanza secundaria, 125-154. Barcelona: ICE Universitat de Barcelona- Horsori. https://laurabrichetti.files.wordpress.com/2010/12/socas-robayna-dificutades-errores-y-obstc3a1culos-en-el-azaje-de-la-matemc3a1tica.pdf

Toledo, F. (2017). *La Topología De Espacios Métricos Animada Con Geogebra*. [Tesis de maestría, Universidad Tecnológica de Pereira]. Archivo digital. http://repositorio.utp.edu.co/dspace/handle/11059/8697

Trujillo, J., Vera, C. y Prada, R. (2017). Estado Del Arte Sobre El Concepto De Límite [Congreso]. *II encuentro internacional en educación matemática.* Cúcuta, Colombia. https://ww2.ufps.edu.co/public/archivos/oferta_academica/8c86ed0111abd2ac61fa2f8fc7d99448.pdf#page=165

https://doi.org/10.56219/lneaimaginaria.v3i22.4662