ERRORES COMETIDOS POR LOS CANDIDATOS A MAESTROS AL RESOLVER PROBLEMAS MATEMÁTICOS

Omar Hernández Rodríguez; ohernandez@prtc.net
Wanda Villafañe Cepeda; wvillac@hotmail.com; wvillac@onelinkpr.net
Universidad de Puerto Rico, Recinto de Río Piedras

Recibido: 01/09/2008 **Aceptado:** 21/01/2009

Resumen

Se presentan los resultados de un estudio fenomenológico sobre la solución de problemas matemáticos. Participaron ocho estudiantes de educación, seis con especialidad en la enseñanza de las matemáticas a nivel elemental (grados 4 a 6) y dos cuya especialidad era educación secundaria en matemáticas (grados 7 a 12). Se realizaron entrevistas extensas con el objetivo de determinar sus creencias sobre los problemas matemáticos y la forma como los resuelven. También participaron en sesiones de solución de problemas con pensamiento en voz alta y entrevistas retrospectivas con el objetivo de determinar el tipo de representación que realizaban, las estrategias que utilizaban para resolverlos y los procesos de autorregulación que exhibían. El uso de estas técnicas permitió contrastar las creencias de las participantes con su ejecución. Se describen y analizan los errores más frecuentes cometidos por los estudiantes al resolver los problemas presentados.

Palabras clave: Solución problemas matemáticos, errores al resolver problemas, futuros maestros de matemáticas.

PRESERVICE MATHEMATICS TEACHERS' ERRORS WHILE SOLVING MATHEMATICAL PROBLEMS

Abstract

A phenomenological study about mathematical problem solving is described. Eight pre-service mathematics teachers participated; six are studying to become teachers at elementary school -4th to 6th grades- and two at high school -7th to 12th grades-. The data was obtained through long interviews, problem solving sessions thinking out loud, and retrospective interviews immediately after the problem solving sessions. The objective of the long interviews was to determine the participants' beliefs and declarative knowledge about this topic. The objective of the problem solving sessions was to determine the type of representation, strategies, and control processes that the participants use when solving problems. During the retrospective interviews, the participants have the opportunity to reflect about their performance. These techniques gave the researchers a comprehensive description of the phenomenon and allowed to contrast the participants' beliefs against execution. The most frequent errors of the students when solving the problems are described and analyzed.

Key words: Mathematical problem solving, errors when solving mathematical problems, pre service mathematics teachers.

Introducción

El proceso de solución de problemas ha constituido un fundamento importante en la enseñanza de matemáticas a través de los años. El Consejo Nacional de Maestros de Matemáticas (NCTM, por sus siglas en inglés), reconoció su importancia y declaró la década de los ochenta como la década de la solución de problemas (Krulik, 1980; NCTM, 1980). Los resultados de las investigaciones realizadas en ese período (Fisher, 1988; Garafalo y Lester, 1985; Ghatala, 1986; Gick, 1986; Schoenfeld, 1985, 1987, 1989, 1992; Schoenfeld y Herrmann, 1982), llevaron a la NCTM a declarar el desarrollo de habilidades para la solución de problemas como una de las cinco metas de las matemáticas escolares (NCTM, 1989). Además, quiso enfatizar en su posición y estableció a la solución de problemas matemáticos como el primer estándar en todos los niveles escolares (NCTM, 1989) y el primer estándar de proceso (NCTM, 2000).

El Programa de Matemáticas del Departamento de Educación de Puerto Rico, se subscribió a la posición del NCTM y declaró que la visión de la enseñanza de las matemáticas debía estar enmarcada en la solución de problemas para pensar, comunicar, aplicar y valorar (Departamento de Educación, 1996). Posteriormente, recomendó el enfoque de la solución de problemas como la metodología para la enseñanza de las matemáticas en todos los niveles (Departamento de Educación, 2000, 2003) y se menciona como uno de los procesos en matemáticas (Departamento de Educación, 2007). Lo anterior evidencia la trascendencia que ha tenido este tema en el proceso de enseñanza – aprendizaje de matemáticas a lo largo del tiempo.

No obstante, a pesar de lo establecido anteriormente, se ha observado que la solución de problemas no se integra frecuentemente en las clases de matemáticas. Algunos autores atribuyen esta situación al conocimiento de la disciplina que tienen los maestros (Ball, 1990; Leonard y Joergensen, 2002; Van Dooren, Verschaffel y Onghena, 2003); otros, a aspectos afectivos y metacognitivos de los maestros, incluyendo las creencias (Grows y Good, 2002; Liljedahl, Rolka y Rösken, 2007; Mewborn y Cross, 2007). En particular, las creencias que tienen los maestros sobre este particular inciden en gran medida en la forma como incorporan el tema en sus clases.

Otro aspecto que se observa en las clases de matemáticas, es que muchas veces los estudiantes no son capaces de transferir el conocimiento matemático adquirido a las distintas situaciones de solución de problemas que se les presentan (Schoenfeld, 1985; Santos Trigo, 1995). Es decir, conocen los algoritmos para resolver los ejercicios, pero se les dificulta identificar cuál de éstos aplicarán para resolver los problemas a los que se enfrentan.

Revisión de la literatura

La solución de problemas y temas relacionados con el mismo se han estudiado extensamente en los últimos años. No obstante, aún existen muchas interrogantes en torno a este particular (Lester, 1994). Específicamente, con el advenimiento de la teoría constructivista del conocimiento, se han realizado investigaciones sobre el papel de la metacognición, las creencias, el afecto y la influencia social en la solución de problemas (Garofalo y Lester, 1985; Hernández Rodríguez, 2002; Maqsud, 1997; Santos Trigo, 1995; Schoenfeld, 1987, 1989, 1992; Swanson, 1990, 1992).

Flavell (1976) definió a la metacognición como el conocimiento que tienen las personas sobre su cognición y los procesos de autorregulación de los procesos cognitivos. Posteriormente, se incluyeron en la definición a las creencias que tienen los estudiantes sobre sí mismos, sobre las matemáticas, sobre la tarea y sobre las estrategias que requiere la situación (De Corte, Greer y Verschaffel, 1996; Garofalo y Lester, 1985; Greeno, Collins y Resnick, 1996; Lampert, 1990; Schoenfeld, 1987).

Schoenfeld (1987) indicó que las creencias que tienen los estudiantes sobre las matemáticas son importantes ya que pueden ayudar o interferir en el proceso de solución de problemas. Lampert

(1990) encontró que los estudiantes consideran que saber matemáticas es recordar y aplicar correctamente ciertas reglas cuando el maestro hace una pregunta y que la verdad es determinada cuando el maestro ratifica la respuesta, lo cual tiene un efecto, generalmente negativo, en la forma en que los estudiantes se desempeñan al momento de resolver problemas matemáticos. Schoenfeld (1987) encontró que los estudiantes consideraban que un problema matemático se resuelve en menos de diez minutos y esta creencia hace que renuncien a seguir trabajando si no llegan rápidamente a su solución.

La solución de problemas por parte de los candidatos a maestros también se ha estudiado. Específicamente, Crespo (2003) llevó a cabo una investigación en la cual exploró los cambios en las estrategias de presentar problemas a los integrantes de un grupo de futuros maestros del nivel elemental. Chapman (2005) realizó un estudio cualitativo para determinar el conocimiento que poseían los futuros maestros de matemáticas sobre solución de problemas y el rol que tenía el incorporar un proceso de reflexión y de inquirir, en mejorar este conocimiento. Cadenas (2007) realizó un estudio que le permitió detectar las carencias, dificultades y errores que tienen los futuros maestros en sus conocimientos matemáticos previo al ingreso a la Universidad.

Las creencias de los maestros de matemáticas en servicio y su relación con el aprendizaje de los estudiantes han sido estudiadas por varios autores. Mewborn y Cross (2007) argumentan que las creencias de los maestros sobre la naturaleza de las matemáticas afecta la visión que ellos tienen sobre su rol como maestros y el rol de sus estudiantes; la selección de las actividades y los acercamientos instruccionales que usan en la sala de clase. Concluyen que las creencias de los maestros tienen una relación íntima con la oportunidad de los estudiantes para aprender y con las creencias de los estudiantes sobre las matemáticas. Ellos consideran que las creencias de los maestros se pueden modificar exponiendo a los mismos a experiencias positivas que los confronten con sus creencias y así los estimulen a cambiarlas. Añaden los investigadores que la práctica instruccional de los maestros también está afectada por factores tales como el contexto social, las creencias y las expectativas de las otras personas que intervienen en el proceso educativo incluyendo los maestros, los padres y los administradores y la estructura filosófica del sistema educativo.

Las preferencias cognitivas y metacognitivas de los maestros en el momento de resolver problemas han sido estudiadas por Leikin (2003) y Grouws y Good (2002). En particular, Leikin (2003) realizó un estudio para explorar los factores que afectan las preferencias de los maestros en los procesos de resolver problemas, explicárselos a un compañero, conectarlo y enseñarlo. Participaron cerca de 170 maestros de matemáticas de escuela superior. Como resultado, pudo observar que existen tres factores que interrelacionados afectan las preferencias de éstos: (1) dos patrones de comportamiento de los maestros: la tendencia a utilizar soluciones estereotipadas y la tendencia a actuar de acuerdo a sus creencias respecto a la solución de problemas, (2) la forma en la cual los maestros caracterizaron la estrategia para la solución y (3) la familiaridad con una estrategia particular o el contenido matemático al cual pertenece el problema.

Grows y Goods (2002) realizaron una investigación en la cual observaron y entrevistaron a 24 maestros de séptimo y octavo grado durante un periodo de tres años. Entre los hallazgos más importantes se encuentran que el tema de la solución de problemas no es muy frecuente en las clases de matemáticas. Los investigadores no observaron lecciones en donde se tratara la solución de problemas aún cuando les pidieron a los maestros que la desarrollaran como tópico central de la clase; cuando los hicieron, la mayoría de los maestros utilizaron el libro, específicamente, escogieron la sección de problemas verbales que correspondía al tema tratado. Los problemas seleccionados se resolvían con operaciones entre los números que proveía el problema, eran superficiales y presentaban poco reto a los estudiantes. La mayoría de los maestros utilizaban el tiempo de la clase discutiendo, ilustrando y explicando el material de la clase y le dedicaban poco tiempo a la solución de problemas. La concepción sobre la solución de problemas variaba mucho entre los maestros; la mayoría de éstos (60%) los caracterizó por la situación que atendían como problemas verbales, problemas prácticos o problemas que requieren altos niveles de pensamiento ("higher order thinking"). El resto de los maestros centró su caracterización en el proceso de solución; algunos fueron relativamente exitosos en aumentar la capacidad de sus estudiantes para la solución de problemas. Éstos se caracterizaron por atender consistentemente durante todo el año y a través de los años la solución de problemas en sus clases. Los investigadores utilizaron una prueba de 10 problemas que requerían pensamiento crítico para ser resueltos y observaron que existe una relación entre los procesos de enseñanza y el desempeño de los estudiantes.

En cuanto a los maestros en formación, Liljedahl, Rolka y Rösken (2007) estudiaron aspectos afectivos de la solución de problemas, Van Dooren, Verschaffel, y Onghena (2003) investigaron la forma en que evolucionan las preferencias cognitivas en los maestros de matemáticas en formación. Específicamente, Liljedahl, Rolka y Rösken (2007) realizaron una investigación con los estudiantes de un curso de metodología especialmente diseñado para modificar las creencias de los futuros maestros sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Los participantes fueron los 39 estudiantes matriculados en el curso de 13 semanas quienes eran estudiantes de pedagogía cuya concentración era escuela elemental y se caracterizaban por su temor hacia las matemáticas y el tener que enseñarlas. Al principio del curso los participantes caracterizaron a las matemáticas como: una caja de herramientas, un sistema, un proceso o su utilidad. Las tres primeras fueron previamente reportadas por Törner y Grigutsch (1994). Las matemáticas vistas como una caja de herramientas se caracterizan por un conjunto de reglas, fórmulas, destrezas y procedimientos, mientras que la actividad matemática se caracteriza por los cálculos, el uso de reglas, procedimientos y fórmulas. Las matemáticas vistas como un sistema se caracterizan por la lógica, las pruebas rigurosas, las definiciones exactas y el lenguaje matemático preciso, mientras que hacer matemáticas consiste en producir demostraciones exactas así como utilizar un lenguaje preciso y riguroso. Las matemáticas vistas como un proceso se consideran en constante construcción en donde las relaciones entre las diferentes nociones y definiciones juega un papel muy importante. La actividad matemática es vista como un proceso creativo de generación de reglas, fórmulas, esto es, en constante invención y re-invención de las matemáticas.

Finalmente, la matemática también puede ser caracterizada por su utilidad y hacer matemática se justifica por su fin utilitario. Durante la clase, el profesor (Liljedahl) utilizó tres métodos para modificar las creencias de sus estudiantes: retar éstas, al hacerlo los estudiantes hacen explícitas sus creencias y así se hacen vulnerables al escrutinio (Feiman-Memser, McDiarmid, Melnick y Parker, 1987; Green, 1971); participar como aprendices de matemáticas en un ambiente constructivista (Ball, 1988); y, experimentar con el descubrimiento matemático lo cual tiene un efecto profundo, inmediato en la transformación de las creencias relacionadas a la naturaleza de las matemáticas (Liljedahl, 2005).

Los participantes utilizaron diarios reflexivos para responder a preguntas asignadas relacionadas con sus creencias sobre las matemáticas, la forma de enseñarlas y la forma de aprenderlas. Las preguntas fueron asignadas al principio, en la séptima semana y al final del curso. Los investigadores codificaron por separado las respuestas de la primera y última semana de acuerdo a las cuatro categorías descritas. Luego contrastaron su codificación con la de los otros investigadores y re codificaron las entradas pertinentes. Las creencias de los participantes sobre las matemáticas evolucionaron de una que la caracterizaban como un sistema o por su utilidad, a una de proceso. Esta evolución es vista por los autores como un des-aprendizaje de las creencias en el proceso de aprender a ser mejores maestros de matemáticas.

Reflexionar sobre las creencias y la forma en que los futuros maestros resuelven problemas permitirá a los investigadores proponer ambientes educativos para la construcción de creencias y conocimientos que propicien la solución de problemas.

Método

Resumen de la investigación

Se establecieron cuatro preguntas de investigación al inicio del estudio. Las mismas estaban relacionadas con las creencias, las representaciones, las estrategias y la autorregulación en las diferentes etapas de la solución de problemas. Es importante recalcar las definiciones de los conceptos anteriores. En particular: los procesos metacognoscitivos incluyen a las creencias y a los procesos de autorregulación o control. Una creencia es una explicación construida por la persona acerca de un área del conocimiento en específico y que determina la forma en que la persona conceptualiza y se desempeña en ésta (Schoenfeld, 1992). Las creencias pueden ser de sí mismo (De Corte, Greer y Verschaffel, 1996), del área de estudio, en este caso, las matemáticas (Greeno, Collins y Resnick, 1996) o de la tarea que se debe realizar (Garofalo y Lester, 1985).

Los procesos cognoscitivos que se estudiaron en esta investigación fueron la construcción de la representación del problema y la selección y uso de una estrategia para resolverlo. Una representación externa es un estímulo a los sentidos, generalmente en la forma de dibujos, diagramas, gráficos, modelos o sistemas simbólicos formales (Janvier, Girandon y Morand, 1993).

Por otro lado, una estrategia general es una técnica que puede ser aplicada a varios dominios del saber y que sirve como guía en el proceso de solución de un problema. Entre las estrategias generales se encuentran el tanteo y el error, el buscar un patrón, el hacer una tabla, el uso de analogías y de elementos auxiliares y el trabajo hacia atrás. Los problemas que se presentaron a los participantes de la investigación se pueden resolver aplicando una o varias estrategias generales. Mientras que una estrategia específica es una técnica que sirve como guía en el proceso de solución de un problema en un dominio en específico.

En este artículo se enfatizarán los errores matemáticos cometidos por los estudiantes mientras resolvían los problemas matemáticos propuestos. En particular, se discutirán los relacionados con el problema número dos y número cuatro.

Participantes

Los participantes fueron estudiantes universitarios matriculados en el programa de formación de maestros de una universidad pública de Puerto Rico, específicamente, aquellos cuya concentración es matemáticas a nivel secundario y/o elemental. Participaron voluntariamente, luego de haber recibido una orientación por parte de los investigadores, de las normas establecidas por la Universidad, correspondientes a la protección de seres humanos participantes en investigaciones. Específicamente, participaron seis estudiantes cuya concentración era nivel elemental (cuarto a sexto) y dos, la cual era educación secundaria, todas del sexo femenino.

Técnicas

Los procedimientos que se usaron para la recolección de la información fueron descriptivos y cualitativos, diseñados para describir un espectro amplio de actividad interna y externa. Se utilizaron las técnicas de: entrevista extensa, solución de problemas con pensamiento en voz alta y entrevista retrospectiva inmediatamente después de la solución de problemas. Estas técnicas permitieron una reflexión de los participantes sobre el tema, lo cual contribuirá a su formación como maestros.

Específicamente, con la entrevista extensa se tuvo acceso al significado que los participantes le atribuyen a la solución de problemas matemáticos y se pudo describir las creencias que ellos tienen sobre este proceso. Posteriormente, los participantes resolvieron cuatro problemas matemáticos no típicos. Se utilizó la técnica de pensamiento en voz alta para poder tener acceso a los procesos cognoscitivos y metacognoscitivos que se manifestaron en el momento de resolver los problemas. Inmediatamente después de cada sesión de solución de problemas, se realizó una entrevista retrospectiva en la cual el participante tuvo la oportunidad de reflexionar sobre su ejecución en la solución de los problemas. De esta manera se exploró no sólo lo que reside en las mentes de los participantes, sino que se estudiaron sus ejecutorias en la solución de problemas y su reflexión sobre las mismas. De esta manera se obtuvieron tres fuentes de información que permitió la triangulación de los datos y así se pudo llegar a conclusiones sobre el tipo de representaciones, las estrategias, los procesos metacognoscitivos de control y las creencias de los participantes sobre la solución de problemas matemáticos no típicos.

Los investigadores transcribieron toda la información recopilada en las entrevistas y durante el proceso de solución de problemas; para realizar el análisis de los datos, se utilizaron las transcripciones de todas las entrevistas, los documentos escritos por los participantes y las anotaciones de los investigadores.

Problemas

Los problemas seleccionados tenían la característica de ser lo suficientemente retantes para requerir un comportamiento metacognoscitivo, pero a la vez los estudiantes los podían resolver con los conocimientos adquiridos en las clases de matemáticas (Goos y Galbraith, 1996). Por otra parte, los problemas tienen diferentes formas de ser representados y diferentes formas de ser resueltos. Los problemas que se utilizaron en este análisis fueron los problemas 2 y 4, los cuales se presentan a continuación.

PROBLEMA 2

Un cuadrado y un rectángulo tienen igual área. La diagonal del cuadrado tiene longitud $8\sqrt{2}$ pulgadas. Si el ancho del rectángulo mide 4 pulgadas, ¿cuál es la medida del largo del rectángulo?

PROBLEMA 4

Con el propósito de recaudar fondos para la Asociación del Cáncer Pediátrico se hace una venta de dulces. Olga, quien está comprometida con esta causa, decide vender 27 bolsas de chocolates. Hay dos tipos de chocolates: rellenos de almendras y rellenos de fresa. Cada bolsa de chocolates con almendras tiene ocho barras y cada bolsa de chocolates con fresas tiene nueve barras. Olga tiene 232 chocolates en total, ¿Cuántas bolsas tiene de cada uno?

Análisis

Por otra parte, además de describirlo, se hizo una interpretación del fenómeno, fruto de la comprensión alcanzada por los investigadores (quienes en este estudio realizaron y transcribieron todas las entrevistas) enriquecida con la revisión de la literatura y su experiencia como profesores e investigadores. La fidelidad de las transcripciones se corroboró escuchando la grabación y leyendo la transcripción simultáneamente. Posteriormente, se analizaron detenidamente las respuestas ofrecidas por los participantes, tanto en las entrevistas extensas como en las retrospectivas.

En particular, el análisis realizado por los investigadores de las entrevistas extensas, ayudó a contestar la pregunta de investigación sobre las creencias de los estudiantes. Además, el análisis realizado del proceso de solución de problemas, proveyó información sobre la forma en que los estudiantes construyen la representación de los problemas, las estrategias que utilizan para resolverlos y las estrategias de autorregulación que exhibieron en el proceso. Los investigadores utilizaron las grabaciones de las sesiones de pensamiento en voz alta, los documentos que crearon los estudiantes durante el proceso y las transcripciones de las observaciones de éstos, como datos para el análisis.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

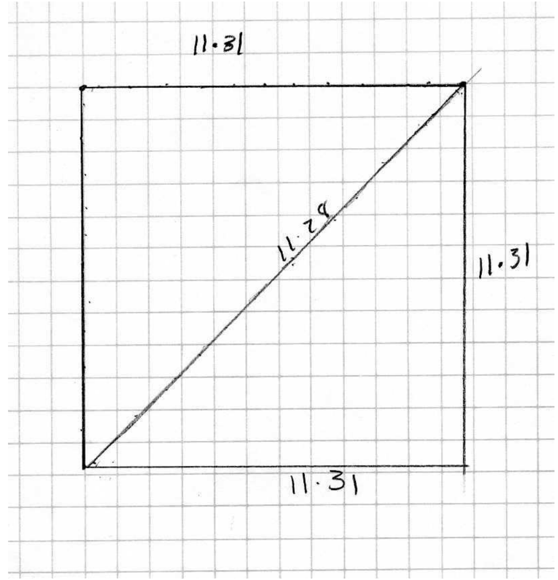
Errores cometidos por las estudiantes cuando resolvieron los problemas

Problema número dos

Muchas de las dificultades encontradas por las estudiantes cuando resolvieron los problemas, se pusieron de manifiesto cuando hicieron la representación de los mismos. Éstas se pueden clasificar como dificultades que provienen de la invención de condiciones a partir de los datos, ignorar algunos datos que provee el problema y otras cuyo origen es matemático. Las primeras son invenciones que construyen los estudiantes, por ejemplo, tres de ellas utilizaron $8\sqrt{2}$ como la diagonal del rectángulo, en lugar de ser la diagonal del cuadrado, que era lo que establecía el problema. Otra estudiante utilizó el 4 como el ancho de las dos figuras, cuando lo que se establecía en el problema era que el 4 era la medida del ancho del rectángulo.

Por otra parte, se presenta la situación que los estudiantes ignoran alguna información que les provee el problema. Por ejemplo, una estudiante no tomó en cuenta el dato de que las dos figuras tenían la misma área, lo cual le impidió resolverlo adecuadamente.

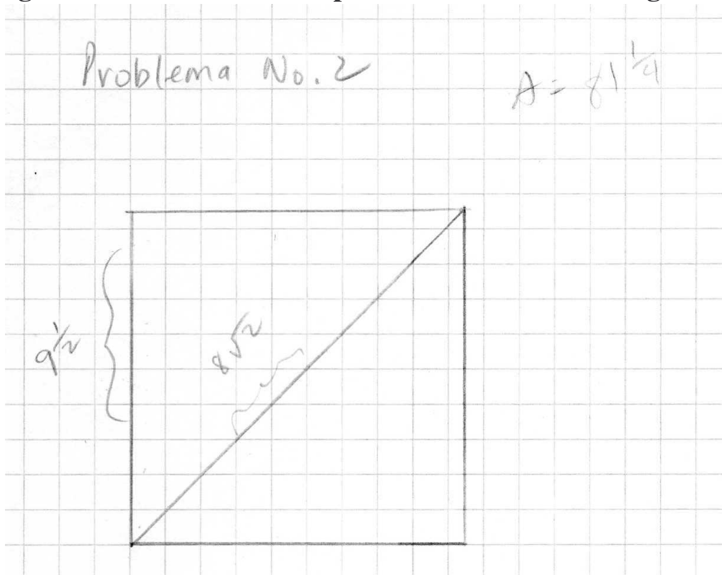
Figura 1. Cuadrado con diagonal igual al lado



El principal error matemático en la representación, ocurrió porque las estudiantes pensaban que la medida de la diagonal del cuadrado unitario es uno. Esto las llevó a construir un cuadrado cuyos lados miden igual que la diagonal del mismo. En la Figura 1 se observa la representación que hizo un estudiante del problema. El estudiante convirtió la expresión $8\sqrt{2}$ a decimal utilizando todos los dígitos que le proveyó la calculadora. A partir del vértice superior izquierdo construye un cuadrado utilizando la cuadrícula. Para establecer la medida de la diagonal cuenta a partir del vértice inferior izquierdo a lo largo de la diagonal obteniendo 11 unidades. Para establecer la parte decimal utiliza la calculadora multiplicando 8 por 1.41. Son dos elementos que llevan a esta situación: primero, pensar que la medida del cuadrado unitario es uno y segundo, la misma representación guía al estudiante a contar las unidades a lo largo de la diagonal. Se puede inferir que el estudiante utiliza un conocimiento (el conteo por unidades en la recta numérica) fuera del contexto conocido y esto lo lleva a un error, lo que D'Amore (2006) llama un obstáculo cognitivo.

También se observó que algunos estudiantes tenían dificultad con la representación de los radicales. Un estudiante expresó $8\sqrt{2}$ como $8 + \sqrt{2}$. Se observa de nuevo la presencia de obstáculos cognitivos: utilizar un conocimiento fuera del contexto conocido y generando respuestas incorrectas. En este caso se presenta la situación del uso de un hecho conocido (la norma de convertir números mixtos a racionales) en un contexto desconocido (convertir $8\sqrt{2}$ a decimal). En la Figura 2 se observa la combinación de dos obstáculos cognitivos en la representación que hizo este estudiante del problema. En este caso la construcción del cuadrado se hace desde la parte inferior izquierda y así se puede observar con mayor facilidad el uso del conteo a lo largo de la diagonal en unidades.

Figura 2. Evidencia de la aparición de obstáculos cognitivos



Se observó que algunos estudiantes utilizaron indistintamente las fórmulas de área y perímetro, evidenciando así el poco dominio de estos conceptos. Este aspecto es preocupante, ya que se desprende de este particular que no sólo no entienden estos conceptos, sino que sólo aplican las fórmulas para determinar los mismos sin ningún razonamiento.

Por otra parte, el proceso que utilizó una estudiante para despejar $l^2 = 128$ fue dividir entre 2 ambos lados de la ecuación. Estos errores coinciden con lo obtenido por Cadenas (2007) y que evidencian el poco dominio de los contenidos matemáticos por los futuros maestros. En particular, Cadenas encontró que los candidatos a maestros presentaron dificultades con la potenciación, radicación y productos especiales. Estas dificultades están relacionadas con el hecho de que desconocen el significado correcto de potencias con exponentes negativos y potencia de potencia.

Los estudiantes tuvieron dificultades para representar gráficamente el problema. De los dos que lograron hacer una representación gráfica correcta del problema, sólo uno pudo cambiarla a una algebraica y resolver el problema.

Problema número cuatro

Se observó que algunas estudiantes realizaron unos cómputos con los números que les daba el problema, sin ningún sentido. Por ejemplo, algunas dividieron el 232 por dos, el cual le da 116 y este número lo dividieron por ocho y por nueve. Obtuvieron: 116 ÷ 8 = 14.5, 116 ÷ 9 = 12.8 Es decir, se infiere que la cantidad total de chocolates, las dividieron por dos porque había dos tipos de éstos. Luego, el dividir el 116 por ocho y por nueve no hace ningún sentido, ya que estos números representarían la cantidad de chocolates en cada bolsa, dato provisto en el problema. Es decir, estaban mezclando los dos tipos de información: cantidad de chocolates y cantidad de chocolates en cada bolsa. Mas aún, al dividir 116 por ocho y por nueve, se obtienen números decimales, los cuales no aportan ninguna información relevante para resolver el problema. Además, algunas cometieron el error de dividir 232 entre 27, obteniendo como respuesta: 8.5925. Nuevamente, estaban uniendo en un mismo enunciado matemático, diferente tipo de información.

Relacionado con lo anterior, otro error que se observó fue que dividieron el 232 entre ocho y entre nueve, cometiendo el mismo tipo de error mencionado previamente, ya que estaban uniendo la cantidad total de chocolates, con la cantidad de chocolates en cada bolsa. En general, los investigadores observaron que si al efectuar alguno de los cómputos, el resultado obtenido por las participantes correspondía a uno de los números dados en el problema, pensaban que habían obtenido la respuesta correcta.

En resumen, los estudiantes se enfocaron en hacer operaciones con los números que les proveía el problema sin establecer la relación entre las cantidades. Es decir, reaccionan como lo hace un novato ante un problema novedoso (English y Halford, 1995).

Finalmente, sólo dos de las estudiantes verificaron el problema luego de haber resuelto el mismo. No se observó que consideraran la verificación como parte del proceso para resolver los problemas.

Estos resultados coinciden con los de estudios anteriores que muestran que los novatos se enfocan en los aspectos sobresalientes tales como objetos específicos o términos mencionados y no en los aspectos estructurales para tratar de determinar de qué forma las entidades mencionadas están interrelacionadas (Chi, Feltovich y Glaser, 1982; Gholson et al., 1990; Novick, 1988, 1992; Silver, 1981; citados por English y Halford, 1995).

Conclusiones

Las participantes demostraron que poseían el conocimiento declarativo sobre solución de problemas, incluso podían establecer las diferencias entre un problema y un ejercicio. Sin embargo, en el momento de resolver los problemas mostraron las siguientes inconsistencias:

1. Las participantes manifestaron que un problema era una situación en donde el proceso de solución no era evidente; sin embargo, esperaban encontrar en el enunciado del problema alguna clave para resolverlo.
2. Las participantes indicaron que verificaban el problema para saber si la respuesta obtenida era correcta, aunque esto no se observó cuando resolvieron los problemas presentados.
3. Se presentaron varias dificultades en la representación de los problemas. Éstas se pueden clasificar como dificultades que provienen de la invención de condiciones a partir de los datos, ignorar datos que provee el problema y otras cuyo origen es matemático.
4. Con respecto al problema de geometría, tres estudiantes trataron de construir las figuras a partir de la diagonal. Ninguna tuvo éxito por los errores que habían cometido en la representación inicial del problema.
5. Dos participantes utilizaron el Teorema de Pitágoras, una con éxito y la otra no, ya que lo utilizó en un rectángulo, al cual le había rotulado la medida de la diagonal como $8\sqrt{2}$.
6. Se evidenció la presencia de obstáculos cognitivos en la representación y solución de los problemas.
7. En el problema número 4, muchas de las estudiantes realizaron cómputos erráticos con los números dados en el problema, lo que permite inferir que no lograron establecer la relación que existe entre los datos antes de empezar a hacer operaciones.

8. A las estudiantes se les dificulta aplicar los conocimientos matemáticos a la solución de problemas.

Recomendaciones

1. Exponer a los futuros maestros frecuentemente a la solución de problemas en los cursos de matemáticas, de manera que desarrollen las destrezas necesarias para resolver los mismos y puedan enseñarlo apropiadamente a sus estudiantes.
2. Fortalecer en los futuros maestros el uso de diversas representaciones para resolver problemas, esto fortalecerá la conexión entre éstas, de forma que puedan utilizar la que sea conveniente en el momento apropiado.
3. Fomentar el uso de estrategias algebraicas en los futuros maestros de escuela elemental, de manera que las actividades aritméticas puedan ser atendidas con un significado algebraico.
4. Incluir en los cursos de metodología de la enseñanza de las matemáticas el análisis de los obstáculos cognitivos y cómo superarlos.
5. Incluir en el currículo de los cursos de solución de problemas, el desarrollo de estrategias metacognoscitivas y ejercicios para el análisis y modificación de creencias.

Referencias

Ball, D. L. (1988). Understanding to teach mathematics. *For the learning of mathematics*, 8(1), 40 – 48.

Ball, D. L. (1990). The mathematical understandings that prospective teachers bring to teacher education. *The Elementary School Journal,* 90, 449 – 467.

Cadenas, R. (2007). Carencias, dificultades y errores en los conocimientos matemáticos en alumnos del primer semestre de la escuela de educación de la Universidad de los Andes. *ORBIS, Revista Científica Ciencias Humanas, 2* (6)*,* 68 – 84.

Chapman, O. (2005). Constructing pedagogical knowledge of problem solving: Preservice mathematics teacher. En H. L. Chick, y J. L. Vincent (Eds.), Proceedings of the 29th conference of the international group for the psychology of mathematics education: Vol. 2 (pp.225 – 232). Melbourne: PME.

Chi, M. T. H., Feltovich, P. J., & Glaser, R. (1981). Categorization and representation of physics problems by experts and novices. *Cognitive Science*, 5, 121-152.

Crespo, S. (2003). Learning to pose mathematical problems: Exploring changes in preservice teachers' practices. *Educational Studies in Mathematics*, 52, 243 – 270.

D'Amore, B. (2006). Didáctica de la matemática. Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.

De Corte, E., Greer, B., & Verschaffel, L. (1996). Mathematics teaching and learning. In D. C. Berliner, & R. C. Calfee (Eds.), *Handbook of educational psychology* (pp. 491-549). New York: Macmillan.

Departamento de Educación (1996). *Marco curricular del programa de matemáticas*. San Juan, P. R.: Autor.

Departamento de Educación de Puerto Rico (2000). *Estándares: Programa de matemáticas.* San Juan, PR: Autor.

Departamento de Educación (2003). *Marco curricular del programa de matemáticas*. San Juan, P. R.: Autor.

Departamento de Educación (2007). *Estándares de contenido y expectativas de grado*. San Juan, P. R.: Autor.

English, L. D., & Halford, G. S. (1995). *Mathematics education: Models and processes*. Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Feiman-Memser, S., McDiarmid, W., Melnick, S., and Parker, M. (1987). Changing beginning teachers'conceptions: a description of an introductory teacher education course. *Paper presented at the annual meeting of the American Education Research Association*. Washington: DC.

Fisher, L. C. (1988). Strategies used by secondary mathematics teachers to solve proportion problems. *Journal for Research in Mathematics Education, 19* (2), 157-168.

Flavell, J. H. (1976). Metacognitive aspects of problem solving. In L. Resnick (Ed.), *The nature of intelligence* (pp. 231-236). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Garofalo, J., & Lester, F. K. (1985). Metacognition, cognitive monitoring, and mathematical performance. *Journal for Research in Mathematics Education, 16* (3), 163-176.

Ghatala, E. S. (1986). Strategy-monitoring training enables young learners to select effective strategies. *Educational Psychologist, 21* (1&2), 43-54.

Gholson, B., Morgan, D., Dattel, A. R., & Pierce, K. A. (1990). The development of analogical problem solving: Strategic processes in schema acquisition and transfer. In D. F.Bjorklund (Ed.), *Children's strategies: Contemporary views of cognitive development* (p. 269-308). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Gick, M. L. (1986). Problem-solving strategies. *Educational Psychologist, 21* (1&2), 99-120.

Greeno, J. G., Collins, A. M.,, & Resnick, L. B. (1996). Cognition and learning. In D. C. Berliner, & R. C. Calfee (Eds.), Handbook of educational psychology (pp. 15-46). New York: Macmillan Library Reference.

Goos, M., & Galbraith, P. (1996). Do it this way! Metacognitive strategies in collaborative mathematical problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, *30*, 229-260.

Green, T. F. (1971). *The activities of teaching*. New York, NY: McGraw-Hill Book, Co.

Grows, D., & Good, T. L. (2002). Issues in problem-solving instruction. In D. L. Chambers (Ed.), *Putting research into practice in the elementary grades: Readings from journals of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 60-62). Reston, VA: NCTM.

Hernández Rodríguez, O. (2002). Procesos cognoscitivos y metacognoscitivos en estudiantes universitarios puertorriqueños en la solución de problema matemáticos no típicos. Disertación doctoral.

Janvier, C., Girandon, C., & Morand, J. C. (1993). Mathematical symbols and representation. In P. S. Wilson (Ed.), *Research ideas for the classroom*. New York: Macmillan Publishing Company.

Krulik, S. (Ed.). (1980). *Problem solving in school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Lampert, M. (1990). When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. *American Educational Research Journal, 25* (1), 29-63.

Leikin, R. (2003). Problem-solving preferences of mathematics teachers: Focusing on symmetry. *Journal of Mathematics Teacher Education, 6***,** 297–329.

Leonard, J., y Joergensen, P. (2002). *Empowering all elementary preservice teachers to teach children mathematics*. (ERIC Document Reproduction Service No. ED469957).

Lester, F. K. Jr. (1994). Musings about mathematical problem-solving research: 1970-1994. *Journal for Research in Mathematics Education, 25* (6), 660-675.

Liljedahl, P. (2005). Aha!: The effect and affect of mathematics discovery on undergraduate mathematics students. *International Journal of Mathematics Education Science and Technology*, 36(2/3), 219-236.

Liljedahl, P., Rolka, K., and Rösken, B. (2007). Affecting affect: The reeducation of preservice tearchers' beliefs about mathematics and mathematics learning and teaching. In G. W. Martin, M.

E. Strutchens, and P. C. Elliott (Eds.), *The learning of mathematics,* (pp. 319-330). Reston, VA: NCTM.

Maqsud, M. (1997). Effects of metacognitive skills and nonverbal ability on academic achievement of high school pupils. Educational Psychology, 17 (4), 387-398.

Mewborn, D. S., & Cross, D. I. (2007). Mathematics teachers' beliefs about mathematics and links to students' learning. In W. G. Martin, M. E. Strutchens, & P. C. Elliot (Eds.), *The learning of mathematics* (pp. 259-269). Reston, VA: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics. (1980). *An agenda for action: Recommendations for school mathematics of the 1980's.* Reston, VA: Author.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation: Standards for school mathematics.* Reston, VA: Author.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: Author.

Novick, L. R. (1988). Analogical transfer, problem similarity, and expertise. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition*, 14, 510-520.

Novick, L. R. (1992). The role of expertise in solving arithmetic and algebra word problems by analogy. In J. I. D. Campbell (Ed.), The nature and origins of mathematical skills (pp. 155-188). Amsterdam: Elsevier.

Santos Trigo, M. L. (1995). ¿Qué significa el aprender matemáticas? Una experiencia con estudiantes de cálculo. Educación Matemática, 7 (1), 46-61.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. New York: Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (1987). What's all the fuss about metacognition? In A. H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive science and mathematics education* (pp. 189-215). New Jersey, Erlbaum.

Schoenfeld, A. H. (1989). Explorations of students' mathematical belief and behavior. *Journal for Research in Mathematics Education, 20* (4), 338-355.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition and sense making in mathematics. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp.334-370). NY: Macmillan.

Schoenfeld, A. H., & Herrmann, D. J. (1982). Problem perception and knowledge structure in expert and novice mathematical problem solvers. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition*, 8, 484-494.

Silver, E. A. (1981). Recall of mathematical problem formulation: Solving related problems. Journal of Research in Mathematics Education, 12(1), 54-64.

Swanson, H. L. (1990). Influence of metacognitive knowledge and aptitude on problem solving. *Journal of Educational Psychology, 82* (2), 306-314.

Swanson, H. L. (1992). The relationship between metacognition and problem solving in gifted children. *Roeper Review, 15* (1), 43-49.

Törner, G., & Grigutsch, S. (1994). Mathematics Weltbilder bei studienanfanger-eine erhebung. *Journal fur Mathematikdidaktik*, 15(3/4), 211-252.

Van Dooren, W., Verschaffel, L., & Onghena, P. (2003). Preservice teachers' preferred strategies for solving Arithmetic and Algebra word problems. *Journal of Mathematics Teachers Education, 6 (1), 27 - 52.*

Autores

Omar Hernández Rodríguez

Doctor en currículo y enseñanza con concentración en Matemática.

Universidad de Puerto Rico, Recinto de Río Piedras; Facultad de Educación, Departamento de Estudios Graduados.
Líneas de Investigación: solución de problemas matemáticos, uso de la tecnología y desarrollo profesional de maestros.
Correo electrónico: ohernandez@prtc.net

Wanda Villafañe Cepeda
Doctora en currículo y enseñanza con concentración en Matemática.
Universidad de Puerto Rico, Recinto de Río Piedras; Facultad de Educación, Departamento de Programas y Enseñanza
Líneas de Investigación: solución de problemas, el uso de manipulativos para aprender Matemáticas y preparación de los futuros maestros en esta área.
Correo electrónico: wvillac@hotmail.com; wvillac@onelinkpr.net